

Yadolah Dodge

Optimisation appliquée





Matériel protégé par le droit d'auteur

Optimisation appliquée

Springer
Paris
Berlin
Heidelberg
New York
Hong Kong
Londres
Milan
Tokyo

Yadolah Dodge

Optimisation appliquée

Avec la collaboration de

Sylvie Gonano-Weber et Jean-Pierre Renfer



Yadolah Dodge
Professeur Honoraire
Université de Neuchâtel
2002 Neuchâtel
yadolah.dodge@unine.ch
www.unine.ch/members/dodgey

Sylvie Gonano-Weber et **Jean-Pierre Renfer**

Sylvie Gonano-Weber
Professeur de statistique
Haute École de Gestion
2002 Neuchâtel

Jean-Pierre Renfer
Office Fédéral de Statistique
Service de méthodes statistiques
2002 Neuchâtel

ISBN : 2-287-21335-X

Imprimé en France
Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

SPIN: 10994331

Maquette de couverture : Jean-François MONTMARCHÉ

Préface

Cet ouvrage présente les concepts fondamentaux d'optimisation classique et de programmation linéaire. Il est destiné aux étudiants d'économie, de gestion, d'informatique de gestion et de mathématiques appliquées. Il s'adresse aussi aux chercheurs de divers domaines des sciences appliquées ainsi qu'aux professeurs qui disposent ainsi d'un support pour leur enseignement. Il est conçu pour un cours couvrant un semestre universitaire, à raison de deux heures de cours et de deux heures de travaux pratiques par semaine. Il nécessite des connaissances en calcul différentiel et en calcul matriciel.

Ce manuscrit a été imprimé pour la première fois en 1987 avec le titre *« Introduction à la programmation linéaire »* par les Éditions EDES de Neuchâtel. Depuis, il a été complété et amélioré par des années d'enseignement et d'expériences.

Outre un prologue et un épilogue, l'ouvrage comporte une partie de théorie mathématique sur le calcul matriciel et les systèmes d'équations et d'inéquations linéaires. Ensuite il traite d'optimisation classique avec et sans contraintes, de programmation linéaire, de la méthode du simplexe et du simplexe révisé. Les derniers chapitres sont consacrés à la dualité, à la postoptimisation et analyse de sensibilité ainsi qu'aux problèmes de transport. L'accent a été mis sur l'explication des méthodes exposées et leur utilisation, en agrémentant la théorie de nombreux exemples numériques tirés de diverses situations de la vie économique et sociale. Chaque chapitre se termine par une série d'exercices illustrant les différents concepts et méthodes étudiés. Les solutions de tous les exercices sont présentées à la fin de l'ouvrage. Certains sujets de programmation linéaire, comme par exemple la théorie des graphes ou celle des réseaux, n'ont pas été abordés dans cet ouvrage. Les personnes intéressées pourront développer leur connaissance en consultant les ouvrages cités en référence.

Je tiens à remercier tout particulièrement Sylvie Gonano-Weber et Jean-Pierre Renfer qui ont collaboré de manière étroite à la rédaction de cet ouvrage. Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes ayant participé à l'élaboration de la première édition. Il s'agit de Thierry Gafner qui m'a aidé pour la partie des problèmes de transport et d'Alain Weber pour la partie informatique. En ce qui concerne la mise au point de cette version, je remercie Thierry Murier pour sa relecture et Christophe Beuret pour l'intégration des programmes Microsoft Solveur dans ce manuscript. Finalement, j'aimerais remercier vivement Anna Serbinenko pour la vérification des corrigés de l'ensemble des exercices ainsi que mon fils Arash auquel je dédie cet ouvrage.

Neuchâtel, Mars 2004

Yadolah Dodge

Table des matières

Chapitre 1

Prologue

1.1 Introduction

Dans une économie caractérisée par la raréfaction des ressources naturelles, une diminution des sources de financement et une concurrence toujours plus vive entre les entreprises, la répartition optimale de moyens limités entre la multitude des besoins devient la tâche principale des responsables politiques et économiques de notre société. Ce problème se retrouve dans tous les domaines de l'activité économique, politique, scientifique et sociale.

En gestion de la production, il s'agit, par exemple, de définir une politique d'approvisionnement, d'adapter la production à la demande, de déterminer les niveaux de stocks. En gestion financière, il faut procéder au choix des investissements et définir un programme d'amortissements. En marketing, il est nécessaire d'établir un réseau de représentants, de choisir un support publicitaire.

En raison de l'ampleur des enjeux décisionnels, le décideur ne peut plus prendre de décisions hâtives et justifier un choix d'attribution fondé sur un raisonnement instinctif ou des calculs naïfs. Une bonne résolution de ce type de problèmes nécessite la connaissance de méthodes approuvées ainsi que la maîtrise des outils mathématiques et informatiques développés à cet effet.

Les méthodes proposées pour résoudre les problèmes évoqués ci-dessus sont nombreuses, mais elles peuvent toutes se résumer à l'énoncé mathématique suivant, à savoir maximiser ou minimiser une fonction numérique de variables soumises à diverses contraintes.

Soit $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction différentiable de n variables à valeurs réelles. Nous désirons trouver $\boldsymbol{x}^*$ tel que $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$, pour tout $\boldsymbol{x}$. Dans ce cas, on dit que f possède un **minimum global** en $\boldsymbol{x}^*$. Les variables notées en caractères gras représentent des vecteurs à n composantes.

On dit que la fonction $f(\boldsymbol{x})$ possède un **minimum local** en $\boldsymbol{x}_0$ s'il existe un ε, $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\boldsymbol{x}$ au ε-voisinage de $\boldsymbol{x}_0$, $f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x})$.

Remarque 1.1 *Un point $\boldsymbol{x}$ appartient au ε-voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ si $x_i \in \,]x_{0i} - \varepsilon, x_{0i} + \varepsilon[$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

La méthode d'optimisation classique nous permet de déterminer des minima locaux en utilisant les dérivées partielles de f. Du calcul différentiel, nous trouvons que si f est différentiable et possède un minimum local au point $\boldsymbol{x}_0$, alors $\boldsymbol{x}_0$ doit être une solution à l'ensemble des n équations :

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = 0, \;\; j = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Exemple 1.1 *Si $f(\boldsymbol{x})$ est une fonction de deux variables x_1 et x_2, le minimum local $\boldsymbol{x}_0$, s'il existe, est une solution des deux équations :*

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 0 \;\; et \;\; \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = 0$$

Dans ce cas, $j = 1, 2$.

Ce résultat est également vrai pour une définition analogue du maximum local. Cette méthode est connue sous le nom de méthode d'**optimisation sans contrainte**.

Lorsqu'il y a des contraintes, il faut résoudre le problème à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Supposons qu'il y ait un ensemble de contraintes de la forme: $g_i(\boldsymbol{x}) = b_i, \;\; i = 1, \ldots, m$

Nous pouvons alors écrire la fonction de Lagrange comme suit :

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\boldsymbol{x})] \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est un vecteur de nombres réels.

Si $f(\boldsymbol{x})$ atteint un minimum local au point $\boldsymbol{x}_0$, alors il existe un vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ tel que :

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j} = 0, \;\; j = 1, \ldots, n$$

et

$$g_i(\boldsymbol{x}_0) = b_i, \;\; i = 1, \ldots, m \tag{1.3}$$

Exemple 1.2 *Considérons le cas d'une fabrique d'acier engagée dans la production de plaques de métal et utilisant dans son processus de fabrication des matériaux recyclés. Le métallurgiste responsable désire prévoir la production d'acier en fonction des matériaux recyclés employés.*

Soient Y_i la production en tonnes à la $i^{\text{ème}}$ fusion et x_{ij} le $j^{\text{ème}}$ type de métal utilisé dans la $i^{\text{ème}}$ fusion, sachant que $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$.

Le métallurgiste sait que le produit final est une fonction linéaire des matériaux entrés (inputs). Donc, il fait l'hypothèse d'un modèle linéaire pour prévoir la production finale qui est :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

où $\boldsymbol{Y}' = (Y_1, \ldots, Y_n), \boldsymbol{X} = (x_{ij}), \boldsymbol{\varepsilon}$ est un terme d'erreurs aléatoires et $\boldsymbol{\beta}$ dénote le paramètre inconnu qui doit être estimé. Pour l'estimation de $\boldsymbol{\beta}$, il utilise la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire qu'il désire minimiser :

$$f(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{1.4}$$

Soulignons que cette fonction est différentiable et qu'il s'agit d'un problème d'optimisation sans contrainte. En annulant les dérivées partielles, nous obtenons les célèbres équations normales de l'analyse de régression sous la forme :

$$-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$$

ou

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

Si nous supposons que $\mathbf{X'X}$ est de rang plein, alors $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ est la solution unique à (1.4) et

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

Cependant, lorsque le métallurgiste débouche sur cette solution, il peut être amené à la refuser si certains $\hat{\beta}_j$ sont négatifs, par exemple. En effet, il a à l'esprit certaines restrictions posées sur $\boldsymbol{\beta}$. Généralement, les produits finis (en tonnes) sont plus petits ou égaux aux matériaux entrés car des pertes surviennent lors de la fusion. Il faut donc introduire ces restrictions supplémentaires sur $\boldsymbol{\beta}$, c'est-à-dire :

$$0 \leq \beta_j \leq 1, \;\; j = 1, 2, \ldots, p$$

Supposons que nous désirons résoudre ce problème avec de telles contraintes par la méthode classique. Le problème est alors :

$$\text{trouver } \boldsymbol{\beta}^*, \text{ tel que } f(\boldsymbol{\beta}^*) \leq f(\boldsymbol{\beta}) \text{ pour tout } \boldsymbol{\beta} \in F \text{ où}$$
$$F = \{\boldsymbol{\beta} \mid 0 \leq \beta_j \leq 1, j = 1, \ldots, p\}$$

De tels problèmes sont en général difficiles à résoudre et nécessitent beaucoup de travail pour en déterminer le minimum global. Le lecteur intéressé peut se référer à Arthanari et Dodge (1993) pour plus de détails.

1.2 Programmation mathématique

Un problème de programmation mathématique peut s'énoncer de la manière suivante :

$$\text{trouver un } \boldsymbol{x}^* \in F \text{ tel que } f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in F$$

Ici F est appelé **ensemble réalisable**. Si F est donné comme sous-ensemble de R^n, nous obtenons alors le problème de **programmation non linéaire** suivant **:**

$$\text{trouver un } \boldsymbol{x}^* \in F \text{ tel que } f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}), \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in F$$
$$\text{où } F = \{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i, \;\; i = 1, \ldots, m; \;\; \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Ici f est appelée **fonction objectif** (fonction économique) et $g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m$ sont les contraintes ; g_i est une fonction à valeurs réelles définie sur F, et $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ est appelée contrainte de non négativité. On peut également énoncer le même problème comme suit :

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimiser} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{sous contraintes} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} & \end{array} \qquad (1.5)$$

Remarque 1.2 *Il est particulièrement aisé de travailler avec une variable x_j sans restriction de signe, en remplaçant x_j par la différence de deux variables non négatives. De même, des contraintes d'égalité peuvent être remplacées par deux contraintes d'inégalité. Des problèmes classiques sans contrainte et des problèmes avec contraintes d'égalité peuvent alors être considérés comme des cas particuliers de (1.5).*

Remarque 1.3 *Lorsque la fonction objectif $f(\boldsymbol{x})$ et les contraintes $g_i(\boldsymbol{x})$ sont linéaires, nous sommes en présence d'un problème de **programmation linéaire**. De plus, si on impose à toutes les variables du programme d'avoir des valeurs entières à l'optimum, nous sommes en présence d'un problème de programmation linéaire en **variables "entières"** ou en nombres entiers.*

Les problèmes de programmation mathématique ont retenu l'attention de chercheurs en mathématiques, en économie et en recherche opérationnelle pendant plus de cinq décades. De plus, l'accent a été mis sur la résolution de certains problèmes en vue de trouver des méthodes efficaces, adaptables aux ordinateurs. Certains problèmes, comme ceux dans lesquels la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, ont été entièrement étudiés et peuvent être résolus aujourd'hui par des méthodes relativement efficaces. De même, les problèmes dans lesquels les solutions doivent être uniquement des composantes entières ont bénéficié d'une attention considérable de la part des chercheurs.

1.3 Les programmes linéaires

Les problèmes de programmation ont pour objectif l'allocation optimale de ressources limitées afin d'atteindre des objectifs donnés. Les contraintes peuvent être d'origines très variées ; par exemple, elles peuvent être imposées

par les conditions du marché ou par celles de la production. Elles peuvent également provenir de la limitation du volume de stockage disponible ou de la quantité de matières en réserve. Il peut exister un grand nombre d'allocations admissibles, mais le but est d'en déterminer une ou plusieurs qui maximisent ou minimisent des quantités telles que les profits ou les coûts.

Les problèmes de programmation cherchent à déterminer la **meilleure solution** possible sous certaines contraintes. En particulier, ils évoquent des situations où un grand nombre de ressources telles que la main d'oeuvre, les machines et diverses matières disponibles doivent être combinées afin d'obtenir des produits de toute nature.

Par exemple, certains produits chimiques peuvent être fabriqués grâce à des combinaisons variées de matières. Les produits obtenus sont ensuite soumis à différents traitements. Il faut, pour réaliser un programme optimal, considérer simultanément toutes les combinaisons possibles.

Comme nous l'avons déjà indiqué auparavant, la programmation linéaire est un cas particulier d'un très vaste domaine : la programmation mathématique. La programmation linéaire concerne une catégorie de problèmes de programmation mathématique, où la fonction objectif et les contraintes sont linéaires.

Les éléments de mathématiques de base, tels que le calcul matriciel et la convexité seront présentés dans le chapitre 2. Le chapitre 3 sera consacré à l'optimisation classique avec ou sans contraintes.

Le chapitre 4 traitera de programmation linéaire. Le sujet du chapitre 5 sera le développement théorique de la méthode du simplexe et le chapitre 6 présentera la méthode du simplexe révisé. Dans le chapitre 7 nous étudierons la théorie de la dualité et son développement puis, dans le chapitre 8, quelques éléments d'analyse de sensibilité. Finalement, nous traiterons des problèmes de transport dans le chapitre 9.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Introduction

Dans de nombreux domaines de l'économie, les différentes variables sont reliées entre elles par des équations linéaires. Le calcul matriciel fournit une notation claire, précise et concise pour formuler et résoudre de tels problèmes, qui seraient la plupart du temps trop compliqués à résoudre de manière algébrique. Dans cette optique, l'utilisation de moyens informatiques permet un gain de temps considérable, notamment grâce à des logiciels tels que STAN, Lindo, Mathematica, Excel, Lotus et bien d'autres encore. Dans ce chapitre, nous présentons les bases de l'utilisation du logiciel **Microsoft Excel,** en particulier, les fonctions matricielles et l'outil **Solveur**. Nous définissons la notion de matrice, terme introduit dans un article publié en 1842 par le mathématicien allemand Otto Hesse (1811-1874), à qui l'on doit notamment le développement de la théorie des fonctions algébriques ainsi que celle des invariants. Nous étudions ensuite les opérations possibles sur les matrices, ainsi que les règles permettant de trouver les solutions d'un système d'équations linéaires, avant de développer la résolution d'un tel système avec Excel. Enfin, nous présentons les notions de vecteurs, d'espaces vectoriels, de convexité et d'inéquations linéaires. Pour conclure, nous donnons une application économique en utilisant un modèle aléatoire simple.

2.2 Logiciel Microsoft Excel

Le logiciel Microsoft Excel est un tableur qui se présente sous la forme d'un classeur composé de feuilles de calcul. Chaque feuille de calcul est un tableau rectangulaire dont les lignes sont identifiées par des nombres et les colonnes par des lettres. Chaque cellule du tableau est donc identifiée par la ligne et la colonne à laquelle elle appartient. On délimite une plage rectangulaire de cellules par le couple de cellules constitué de la première cellule en haut à gauche et de la dernière en bas à droite.

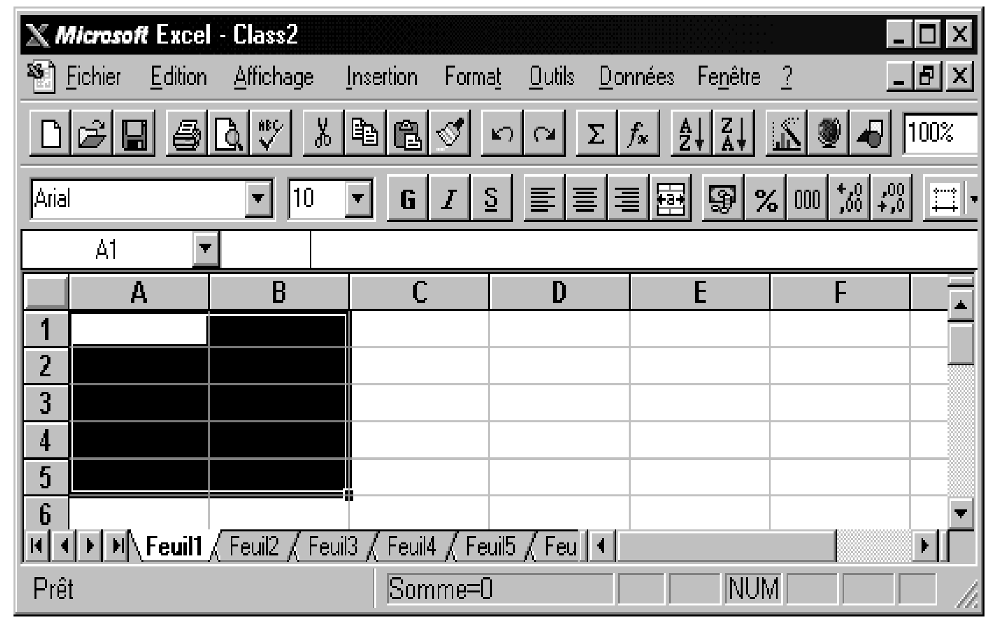


Figure 2.1 : Sélection de la plage (A1 :B5)

Une cellule de feuille de calcul Excel peut contenir du texte, un nombre, une formule ou faire référence à une autre cellule ou groupe de cellules. Il est possible d'attribuer un nom à une cellule ou à un groupe de cellules ; il suffit alors de citer ce nom sans qu'il soit nécessaire de se souvenir de l'emplacement de cette cellule ou de ce groupe de cellules. Ce nom peut contenir jusqu'à 255 caractères, mais ne doit pas commencer par un chiffre ; d'autre part, les caractères spéciaux tels que !{+*-/@<>&# ne peuvent pas être utilisés. Nous verrons au point 2.5 qu'il est parfois nécessaire d'attribuer un nom. Pratiquement, la façon la plus simple de procéder est la suivante (voir aussi Figure 2.2) :

1. sélectionner la ou les cellules à nommer ;
2. cliquer avec la souris sur **Nom** dans le menu **Insertion** ;
3. choisir l'option **Définir** et taper le nom dans la boîte de dialogue.

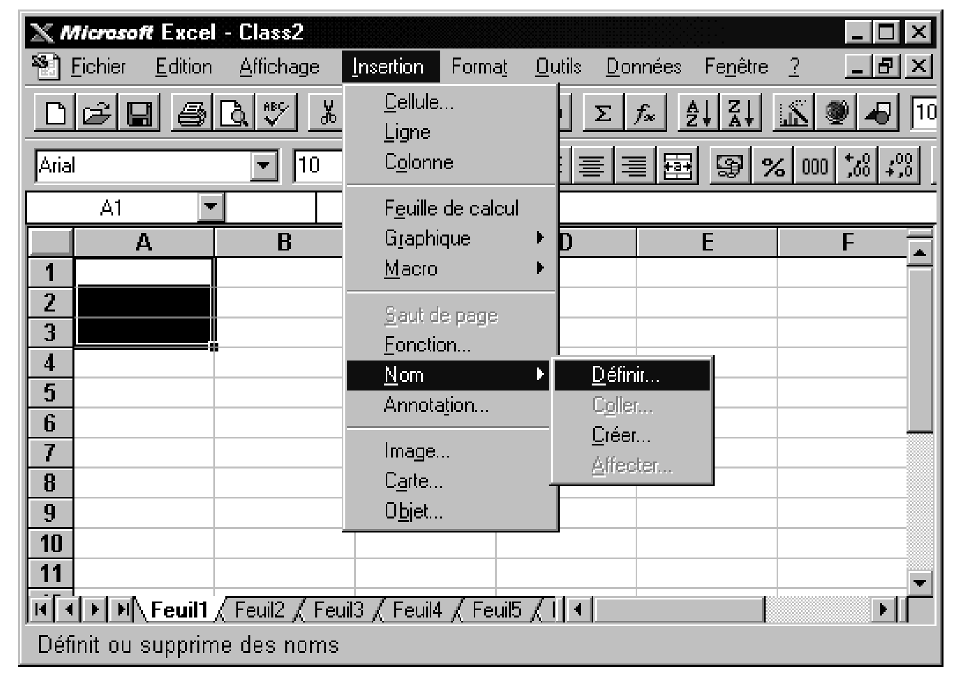


Figure 2.2 : Définir un nom pour la plage de cellules sélectionnées.

Il est parfois utile et plus rapide d'attribuer des noms déjà saisis au-dessus, au-dessous, à gauche ou à droite des cellules ; tout particulièrement s'il y a plusieurs cellules à nommer et lorsque le résultat présenté est un tableau à double entrée, la procédure devient alors :

1. taper les noms à donner sur la ligne supérieure ou dans la colonne de gauche ;
2. sélectionner la ou les cellules à nommer ;
3. cliquer avec la souris sur **Nom** dans le menu **Insertion** ;
4. choisir l'option **Créer** et sélectionner l'emplacement des noms dans la boîte de dialogue (Figure 2.3).

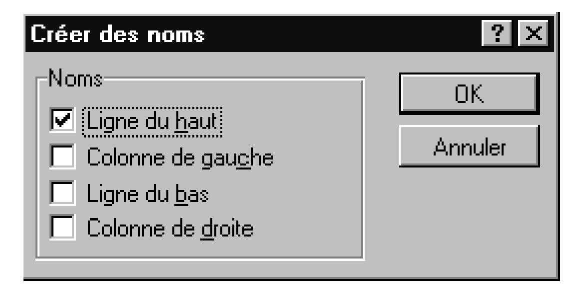


Figure 2.3 : Boîte de dialogue "Créer des noms".

2.3 Les fonctions dans Excel

Outre les opérations mathématiques élémentaires, Excel est doté de nombreuses fonctions mathématiques, statistiques, financières et logiques. Lorsqu'une fonction est placée dans une cellule, elle commence toujours par le signe "=".
Il existe deux solutions pour saisir une fonction : soit en la tapant directement dans la cellule, ce qui suppose que l'on en connaît la syntaxe exacte, soit en utilisant l'assistant de fonction (Figure 2.4) en cliquant sur **Fonction** dans le menu **Insertion**.

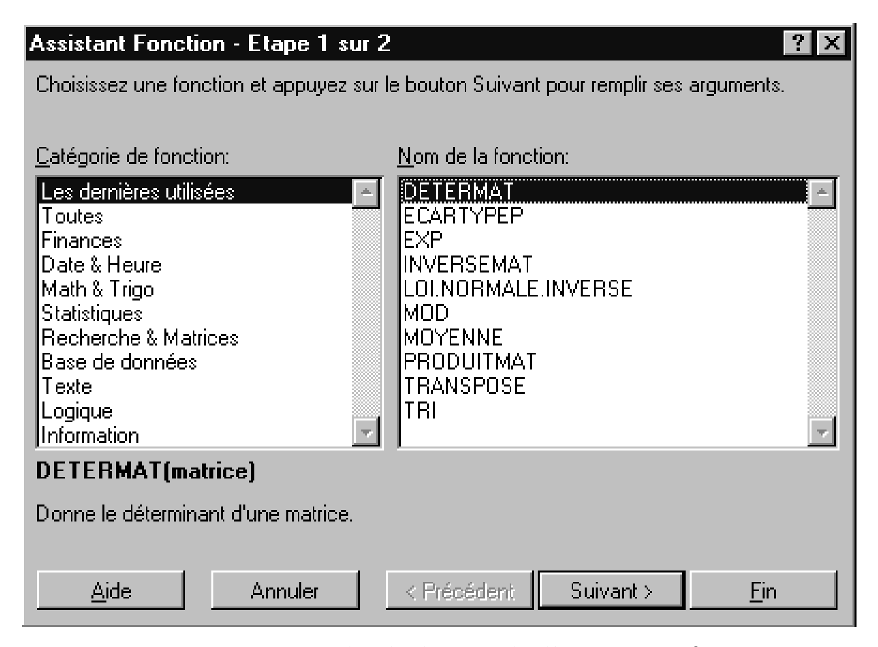


Figure 2.4 : Boîte de dialogue de l'assistant fonction

Il est souvent plus intéressant d'utiliser des formules qui effectuent des opérations sur des nombres contenus dans un groupe de cellules. La Figure 2.5 explique ainsi comment élever tous les nombres de la colonne A à la puissance contenue dans la cellule B1. Noter que la référence B1 est précédée du signe \$, pour qu'elle ne soit pas modifiée en recopiant la formule vers le bas (en cliquant et en tirant avec la souris la poignée de recopie).

Grâce à cette manière de procéder, même si le contenu des cellules change, le résultat est automatiquement modifié. D'autre part, il est possible de combiner les différentes fonctions d'Excel entre elles.

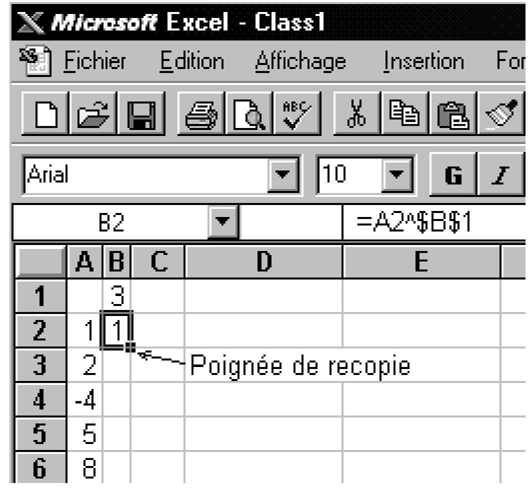


Figure 2.5 : En tirant la poignée de recopie jusqu'à la cellule B6, le calcul est automatiquement effectué.

2.4 Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres réels pouvant se représenter de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les termes représentés dans le tableau constituent les éléments de la matrice. Ces éléments, notés a_{ij}, sont caractérisés par leur valeur et leur position. L'indice de ligne i et l'indice de colonne j indiquent la position d'un

élément dans la matrice. Ainsi, l'élément a_{ij} se trouve dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Une matrice composée de m lignes et n colonnes est dite d'ordre $(m \times n)$. Une matrice d'ordre $(m \times 1)$ est appelée **vecteur-colonne,** tandis qu'une matrice d'ordre $(1 \times n)$ est appelée **vecteur-ligne**. Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est une matrice **carrée** d'ordre n.

Dans le logiciel Excel, tout groupe de cellule formant un tableau rectangulaire peut être considéré comme une matrice. La plupart des opérations sur les matrices peuvent être effectuées directement en utilisant l'Assistant fonction. Pour valider une fonction matricielle, il suffit de presser simultanément les touches **Ctrl**, **Shift** et **Enter**.

2.5 Opérations élémentaires sur les matrices

- **Addition de matrices**

Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ et $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ sont deux matrices d'ordre $(m \times n)$, leur somme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ est définie par la matrice $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ d'ordre $(m \times n)$, dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ainsi, l'addition se fait terme à terme.

- **Multiplication d'une matrice par un scalaire**

Si α est un scalaire et $\boldsymbol{A}$ une matrice, le produit $\alpha\boldsymbol{A}$ s'obtient en multipliant chaque élément de $\boldsymbol{A}$ par α : $\alpha\boldsymbol{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

- **Multiplication de matrices**

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices, le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini si et seulement si **le nombre de colonnes de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{B}$**. Si $\boldsymbol{A}$ est d'ordre $(m \times p)$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $(p \times n)$ alors le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini par la matrice $\boldsymbol{C}$ d'ordre $(m \times n)$ dont les éléments sont obtenus par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1, \ldots, m \quad \text{et} \quad j = 1, \ldots, n$$

Exemple 2.1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

La fonction à utiliser dans Excel est **PRODUITMAT**. Une fois que les deux matrices ont été saisies, il faut sélectionner une plage de cellules de dimension appropriée. La figure 2.6 représente la feuille de calcul correspondante ainsi que l'Assistant de fonction lors de la dernière étape précédant la validation du résultat.



Figure 2.6 : Multiplication de matrices sur Excel.

À noter que $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$; en effet, on voit dans la Figure 2.7 que les résultats sont différents.

J11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A =	1	0	2		AB =	8	0	
2		4	1	0			9	5	
3									
4		2	0				2	0	4
5	B =	1	5			BA =	21	5	2
6		3	0				3	0	6
7									

Figure 2.7 : Résultats de $\boldsymbol{AB}$ et de $\boldsymbol{BA}$

La multiplication matricielle n'est pas commutative : $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, en général.

Lorsque $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, on dit que les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ commutent. Dans ce cas, on écrit $\left[\ \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}\ \right]$.

- **Transposée d'une matrice**

La transposée d'une matrice $\boldsymbol{A}_{(m\times n)}$ est définie comme une nouvelle matrice, notée $\boldsymbol{A}'_{(n\times m)}$. Elle a pour colonnes les lignes de $\boldsymbol{A}$ et pour lignes les colonnes de $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}' = (a_{ij})' = (a_{ji})$.

La fonction **TRANSPOSE** permet d'obtenir rapidement le résultat souhaité dans Excel. Elle s'utilise comme les autres fonctions matricielles, en sélectionnant la plage de destination et en appelant l'Assistant fonction.

Exemple 2.2 *La matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* (2×3) *et sa transposée* $\boldsymbol{A}'$ *d'ordre* (3×2) *calculée avec Excel.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

B4 {=TRANSPOSE(B1:D2)}

	A	B	C	D	E	F
1	A =	2	4	0		
2		3	1	8		
3						
4		2	3			
5	A' =	4	1			
6		0	8			

2.6 Les différents types de matrices

- **Matrice nulle**
  La matrice nulle, notée **0** n'est composée que de 0.

- **Matrice identité**
  Il s'agit d'une matrice carrée contenant le chiffre 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Elle est notée $\boldsymbol{I}$.

- **Matrice symétrique**
  Il s'agit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée telle que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$.

- **Matrice anti-symétrique**
  Il s'agit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée telle que $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}'$. Une matrice anti-symétrique comporte des 0 sur sa diagonale principale.

- **Matrice scalaire**
  Il s'agit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée telle que :

$$a_{ij} = \alpha \quad \text{si} \quad i = j$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

- **Matrice diagonale**
  Il s'agit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée telle que :

$$a_{ij} = d_{ij} \quad \text{si} \quad i = j$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

- **Matrice triangulaire supérieure**
  Il s'agit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée telle que :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i > j$$

2.7 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.1 *La trace d'une matrice carrée* $\boldsymbol{A}$ *est la somme des éléments de la diagonale principale :*

$$Tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.8 Déterminant

À chaque matrice carrée $\boldsymbol{A}$, on associe un nombre appelé déterminant que l'on note dét$(\boldsymbol{A})$ ou simplement $\mid \boldsymbol{A} \mid$.

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ d'ordre n, on commence par choisir n éléments a_{ij} en prenant un seul élément par ligne et par colonne pour en faire le produit.

On peut procéder à ce choix de la manière suivante: on conserve dans leur ordre naturel les indices de ligne et on opère une permutation quelconque des indices de colonne

$$a_{1j1}a_{2j2}\dots a_{njn}$$

On multiplie ensuite ce produit par $\varepsilon_{(j)}$, c'est-à-dire par 1 si la permutation est paire et par -1 si la permutation est impaire.

En procédant de même pour toutes les permutations et en sommant tous ces produits, on obtient le déterminant de $\boldsymbol{A}$.

Définition 2.2 *On définit le déterminant comme suit :*

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = \sum_{(j)} \varepsilon_{(j)} a_{1j1}a_{2j2}\dots a_{njn}$$

Le symbole $\sum_{(j)}$ signifie que la somme est calculée sur toutes les permutations.

Exemple 2.3 *Pour une matrice d'ordre 3, on a :*

Permutations	Nombre d'inversions	Parité
1,2,3	0	paire
2,3,1	2	paire
3,1,2	2	paire
1,3,2	1	impaire
2,1,3	1	impaire
3,2,1	3	impaire

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= a_{1(1)}a_{2(2)}a_{3(3)} + a_{1(2)}a_{2(3)}a_{3(1)} + a_{1(3)}a_{2(1)}a_{3(2)} \\ &\quad - a_{1(1)}a_{2(3)}a_{3(2)} - a_{1(2)}a_{2(1)}a_{3(3)} - a_{1(3)}a_{2(2)}a \end{aligned}$$

La définition du déterminant qui a été donnée s'appelle l'expansion par les lignes (indices de ligne fixés dans leur ordre naturel).

On peut tout aussi bien fixer les indices de colonnes dans leur ordre naturel et opérer les permutations sur les indices de ligne.

On obtient le même résultat du déterminant en faisant une expansion par les colonnes. Ainsi $\mid \boldsymbol{A} \mid = \mid \boldsymbol{A}' \mid$.

Ce résultat très important provient du fait que tous les résultats sur les lignes de $\boldsymbol{A}$ seront également valables pour les colonnes de $\boldsymbol{A}$.

Appliquons ce résultat à un exemple numérique résolu avec Excel (Figure 2.8). La fonction qui calcule le déterminant s'appelle **DETERMAT**. Il faut se placer dans la cellule de destination, choisir la fontion **DETERMAT** dans l'Assistant fonction et sélectionner la plage de cellules correspondant à la matrice $\boldsymbol{A}$.

$$\text{Soit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

F2 =DETERMAT(B1:D3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		2	3	-1				
2	A =	0	6	4	dét (A) =	-10		
3		-1	2	2				
4								

Figure 2.8 : Calcul du déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$

- **L'expansion du déterminant par les cofacteurs**

  Reprenons le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ ci-dessus :

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\left(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\right) \end{array}$$

Considérons maintenant les deux termes qui contiennent l'élément

$$\begin{array}{lll} a_{11} & : & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \text{ que nous pouvons écrire} \\ & & a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) \end{array}$$

Les termes entre parenthèse représentent le **cofacteur** de l'élément a_{11}. On notera qu'il ne contient aucun élément de la première ligne ni de la première colonne. Nous représentons le cofacteur de a_{11} par A_{11}.
Considérons maintenant les deux termes du déterminant contenant le 2e élément de la première ligne $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} &= a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) \\ &= a_{12}A_{12} \end{aligned}$$

De même, pour le troisième élément de la première ligne de $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} &= a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\ &= a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

Notons que tous les termes du déterminant ont été utilisés. Nous pouvons donc écrire :

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij}$$

Le même raisonnement peut être répété pour toutes les lignes et colonnes de $\boldsymbol{A}$. Le cofacteur A_{ij} de l'élément a_{ij} est égal au déterminant de la sous-matrice obtenue à partir de la matrice originale lorsque l'on a éliminé la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$.

2.9 Inverse d'une matrice

Définition 2.3 *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices du même ordre. $\boldsymbol{B}$ est l'inverse de $\boldsymbol{A}$ si et seulement si :*

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

Résultat 2.1 *Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée. Si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$, alors $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ (l'inverse à droite et à gauche sont identiques).*

On note l'inverse d'une matrice $\boldsymbol{A}$ par $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Résultat 2.2 *Si $\boldsymbol{A}$ est inversible (c'est-à-dire possède un inverse), alors l'inverse est unique.*

2.10 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Nous avons vu précédemment qu'à chaque élément a_{ij} de la matrice $\boldsymbol{A}$ correspond un cofacteur A_{ij}. Nous pouvons dès lors former la matrice des cofacteurs (A_{ij}). Cette matrice sera notée $\boldsymbol{A^c}$.

La transposée de cette matrice est appelée matrice adjointe et notée $\boldsymbol{A^a}$.

$$\boldsymbol{A^a} = (A^c)' = (A_{ij})' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Le produit $\boldsymbol{AA^a}$ est une matrice dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

Or, le résultat 2.2 nous montre que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Par conséquent, tous les éléments hors de la diagonale principale de $\boldsymbol{AA^a}$ sont nuls. Les éléments de la diagonale principale sont donnés par :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \mid \boldsymbol{A} \mid$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{AA^a} = \mid \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}$$

Si $\mid \boldsymbol{A} \mid \neq 0$, on obtient :

$$\boldsymbol{A}\frac{1}{\mid \boldsymbol{A} \mid}\boldsymbol{A^a} = \boldsymbol{I}$$

et puisque l'inverse est unique :

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{\mid \boldsymbol{A} \mid}\boldsymbol{A^a}$$

À noter que l'inverse de $\boldsymbol{A}$ existe si et seulement si :

$$\mid \boldsymbol{A} \mid \neq 0$$

Dans ce cas, $\boldsymbol{A}$ est dite non-singulière.

- **Marche à suivre pour inverser une matrice**

1. Calculer $\mid \boldsymbol{A} \mid$; si $\mid \boldsymbol{A} \mid = 0$, l'inverse n'existe pas !
2. Pour chaque élément de $\boldsymbol{A}$, calculer son cofacteur.
3. Construire la matrice adjointe : $(\boldsymbol{A^c})' = \boldsymbol{A^a}$.
4. $\boldsymbol{A^{-1}}$ s'obtient en divisant chaque élément de $\boldsymbol{A^a}$ par le déterminant de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{\mid \boldsymbol{A} \mid}\boldsymbol{A^a}$$

Le logiciel Excel contient une fonction permettant d'inverser une matrice (Figure 2.9). Il s'agit de la fonction matricielle **INVERSEMAT**, que l'on active en sélectionnant une plage de cellule de dimension égale à la matrice à inverser et que l'on valide avec les touches **Ctrl** + **Shift** + **Enter**.

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

G1 {=INVERSEMAT(B1:D3)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		2	0	1			2	0	-1	
2	A =	0	1	0		A^{-1} =	0	1	0	
3		3	0	2			-3	0	2	

Figure 2.9 : Matrice $\boldsymbol{A}$ et son inverse.

2.11 Rang d'une matrice

Avant d'introduire la notion de rang d'une matrice, rappelons qu'une sous-matrice de $\boldsymbol{A}$ est une matrice obtenue de $\boldsymbol{A}$ en éliminant un certain nombre de lignes et de colonnes.

La plus grande sous-matrice est la matrice $\boldsymbol{A}$ elle-même tandis que la plus petite n'est composée que d'un seul élément de $\boldsymbol{A}$.

Remarque 2.1 *L'ordre maximum d'une sous-matrice carrée d'une matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* $m \times n$ *est égal au plus petit des entiers* m *et* n*.*

Soit r un nombre entier tel que $r \leq \min(m, n)$.

Le rang d'une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $(m \times n)$ est égal à r s'il existe au moins une sous-matrice carrée d'ordre r qui est non-singulière et si toutes les sous-matrices carrées d'ordre supérieur à r sont singulières.

Définition 2.4 *Le rang d'une matrice est égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée non-singulière.*

Dans le cas d'une matrice nulle, on dit que le rang est zéro. Lorsque le rang r d'une matrice est maximal : $r = \min(m, n)$; la matrice est dite de rang plein.

2.12 Transformations élémentaires

Il est évident que le calcul du rang d'une matrice peut être une opération très longue. Prenons le cas d'une matrice carrée d'ordre n. Nous devons d'abord calculer le déterminant de la matrice. S'il est différent de zéro, le rang de la matrice est n, mais s'il est égal à zéro, il faut calculer le déterminant des sous-matrices d'odre $(n-1)$. Or, il y en a n^2. Et si toutes ces sous-matrices ont un déterminant nul, il faut passer aux sous-matrices d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite. C'est pour cette raison que nous allons voir une méthode qui facilite la détermination du rang d'une matrice. Cette méthode se base sur les **transformations élémentaires**.

Il y a trois sortes de transformations élémentaires :

1. Echange de deux lignes (colonnes) de la matrice.

2. Multiplication de tous les éléments d'une ligne (colonne) de la matrice par la même constante (différente de zéro).

3. Addition aux éléments d'une ligne de la matrice un multiple quelconque des éléments correspondants d'une autre ligne (idem pour les colonnes).

Ces transformations élémentaires ne changent pas le rang de la matrice. Ainsi, nous allons utiliser ces transformations pour réduire une matrice $\boldsymbol{A}$ à sa **forme normale**. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$, sa forme normale

est la suivante :

$$\begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Le rang de cette matrice est r, car la plus grande sous-matrice non-singulière est d'ordre r.

2.13 Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme générale :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Ce système peut s'écrire de façon beaucoup plus concise sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{A}$ est la $(m \times n)$ matrice des coefficients, $\boldsymbol{x}$ le $(n \times 1)$ vecteur des inconnues et $\boldsymbol{b}$ le $(m \times 1)$ vecteur des constantes (également appelé second membre).

La terminologie adoptée dans ce paragraphe est la suivante : on appelle matrice augmentée la matrice $\boldsymbol{A}$ à laquelle on a ajouté le vecteur $\boldsymbol{b}$ et on la note $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$. On appelle solution du système l'ensemble des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfait simultanément les m équations du système.

Un système d'équations est dit équivalent à un autre système si toutes les solutions du premier système sont les mêmes que celles du deuxième et inversement.

Résultat 2.3 *Les trois opérations élémentaires (décrites dans le paragraphe 2.12) appliquées aux lignes de la matrice augmentée fournissent un système d'équations équivalent.*

Exemple 2.4 *Soit à résoudre le système d'équations linéaires :*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 19 \end{aligned}$$

La matrice augmentée s'écrit :

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 19 \end{array}\right)$$

Appliquons les opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice de manière à obtenir la matrice identité dans la partie non-augmentée.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 19 \end{array}\right) \frac{1}{2}L_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 \\ 5 & 7 & 19 \end{array}\right) L_2 - 5L_1$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) (-2)L_2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 - \frac{3}{2}L_2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Le système d'équations ainsi obtenu est équivalent à celui de départ et s'écrit :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + 1x_2 = 2 \end{aligned}$$

D'où la solution immédiate : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Cependant, il n'est pas toujours possible de procéder ainsi ; en effet, nous n'avons pu obtenir une matrice identité dans la partie non-augmentée que parce que la solution à ce système d'équations était unique.

Un système d'équations peut avoir une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution. Dans ce dernier cas, on dit que le système est incompatible. Si un système d'équations a au moins une solution, il est dit compatible.

Le résultat 2.4 nous indique sous quelle condition un système est compatible.

Résultat 2.4 *Un système de m équations à n inconnues est compatible si et seulement si :*

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$$

En effet, par des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, on aboutit au système d'équations équivalent suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

où la notation $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ indique que les valeurs de a_{ij} et b_i ont été modifiées par ces opérations élémentaires.

Le rang de cette matrice sans la dernière colonne est r.

Si $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = ... = \tilde{b}_m = 0$, le rang de la matrice augmentée correspond également à r et le système est compatible.

En revanche, si l'une de ces valeurs est non nulle (par exemple $\tilde{b}_k \neq 0$, avec $r + 1 \leq k \leq m$), le rang de la matrice $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ vaut $r + 1$. Le système est donc incompatible puisque l'équation $0 = \tilde{b}_k$ est absurde.

Notons que lorsque le système est compatible, on peut donner aux $(n-r)$ variables $\tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ des valeurs arbitraires et calculer les valeurs correspondantes de $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$.

On trouve ainsi toutes les solutions du système. On parle alors de solution complète.

Exemple 2.5 *Soit à résoudre le système d'équations :*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 7x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 19 \end{aligned}$$

Effectuons les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 10 & -2 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -9 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_3 - 3L_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Comme $r(A) = r(A \mid \boldsymbol{b}) = 2$, le système est compatible. On peut choisir $(n-r) = (3-2) = 1$ variable arbitrairement. Écrivons pour cela les équations obtenues à partir de la dernière matrice augmentée :

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 0x_2 + 4x_3 & = & 17 \\ 0x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -10 \end{array}$$

Posons par exemple $x_3 = t \in I\!R$. D'où $x_1 = 17 - 4t$ et $x_2 = -10 + 3t$.

La solution complète du système est donc :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - 4t \\ -10 + 3t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R$$

Pour chaque valeur donnée du paramètre t, la solution satisfait le système considéré de trois équations à trois inconnues.

Voyons à présent les trois cas de figure qui peuvent se présenter dans un système d'équations, à savoir $m = n$, $m > n$ et $m < n$.

Système de m équations à n inconnues $(m = n)$:

- $\mid \boldsymbol{A} \mid \neq 0$: la solution est unique et donnée par $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
- $\mid \boldsymbol{A} \mid = 0$ et $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$: infinité de solutions.
- $\mid \boldsymbol{A} \mid = 0$ et $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$: pas de solution.

Système de m équations à n inconnues $(m > n)$:

- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ et $r(\boldsymbol{A}) = n$: solution unique.
- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ et $r(\boldsymbol{A}) < n$: infinité de solutions.
- $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$: pas de solution.

Système de m équations à n inconnues $(m < n)$:

- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$: infinité de solutions.
- $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$: pas de solution.

À noter que lorsque $m < n$, il ne peut y avoir une solution unique puisque $r < n$ et donc $(n - r) > 0$.

2.14 Utilisation de l'outil Solveur

Après cette section consacrée aux systèmes d'équations linéaires, il est opportun d'expliquer l'utilisation de l'outil **Solveur** d'Excel. En effet, il permet de résoudre aisément de tels systèmes.

Exemple 2.6 *Soit à résoudre le système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 16 \\ 7x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 57 \end{aligned}$$

Il convient en premier lieu de nommer les cellules contenant les variables. La solution la plus simple consiste à écrire sur la première ligne les variables et à attribuer à la deuxième ligne des valeurs arbitraires. Pour ce faire, il faut sélectionner les cellules à nommer puis choisir **Nom**, **Créer** dans le menu **Insertion**, avant de séléctionner la ligne du haut et de cliquer sur OK.



Figure 2.10 : Attribution des noms de variables aux cellules A2 :C2

Il faut ensuite saisir les trois équations du système dans la feuille de calcul :

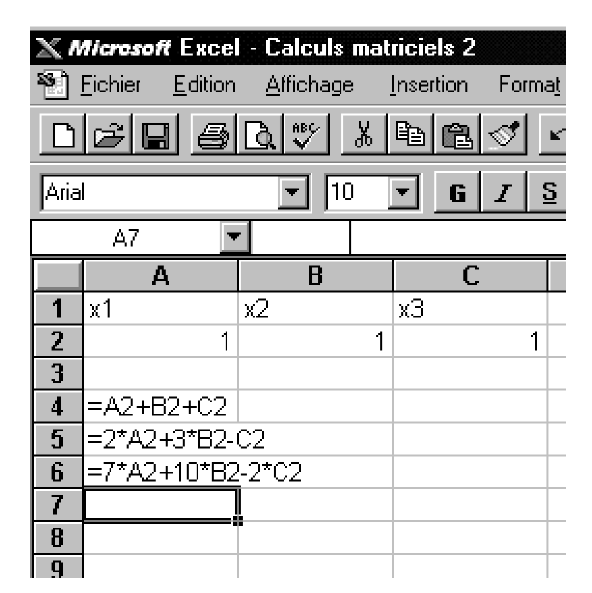


Figure 2.11 : Saisie des équations

À noter que les équations n'apparaissent pas à l'écran. En revanche, les résultats des calsculs sont affichés avec les valeurs actuelles (dans notre exemple $x_1 = x_2 = x_3 = 1$) des variables. L'étape suivante consiste à lancer le Solveur en cliquant sur **Solveur** du menu **Outil**.



Figure 2.12 : Boîte de dialogue du Solveur

Le logiciel propose toujours de définir une cellule cible : celle-ci doit correspondre à la première des trois équations du système. Si tel n'est pas le cas, cliquer dans la plage Cellule à définir et sélectionner la cellule contenant la première des trois équations. La ligne suivante permet de choisir le type de résolution ; dans notre cas, il faut choisir Valeur et noter 9 (valeur du second membre de la première équation). Dans le champ Cellules variables, sur une feuille de calcul où seul un groupe de variables a été dé fini, Excel propose d'office les cellules contenant ces variables. Si tel n'est pas le cas, placer le curseur dans le champ et sélectionner les cellules correspondantes sur la feuille de calcul (dans notre exemple, il s'agit de la plage A2 :C2).

Pour le Solveur, les deux autres équations du système représentent les contraintes. Cliquer sur Ajouter et, dans la boîte de dialogue qui apparaît, sélectionner la cellule correspondante et la valeur que doit prendre la contrainte.

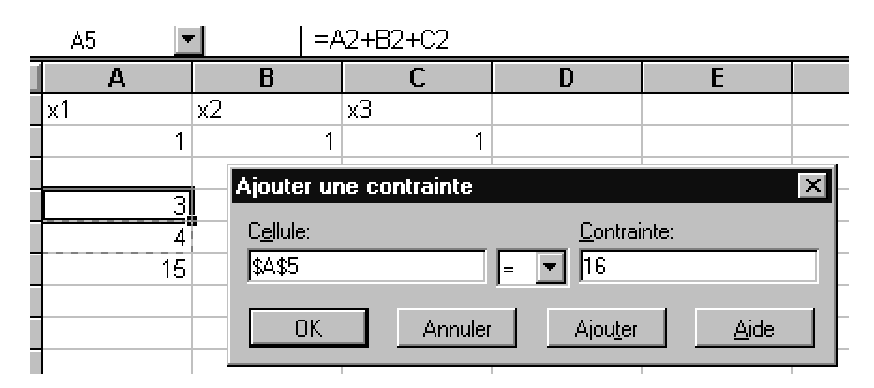


Figure 2.13 : Ajout d'une contrainte

Répéter l'opération avec la troisième équation. La boîte de dialogue du Solveur apparaît finalement de la manière suivante :

Figure 2.14 : Boîte de dialogue du Solveur lors de l'étape précédant immédiatement la résolution du système

Le programme s'exécute en cliquant sur Résoudre. Lorsqu'une solution est trouvée, une nouvelle boîte de dialogue s'affiche et propose de conserver cette solution ou de rétablir les valeurs d'origine. Différents rapports sur la procédure sont proposés.

Figure 2.15 : Le Solveur a trouvé une solution

Excel affiche les valeurs de x_1, x_2 et x_3 dans les cellules A2, B2 et C2 ainsi que les valeurs des seconds membres des trois équations dans les cellules A4, A5 et A6. À noter que les valeurs calculées ne sont pas toujours exactes : il est en effet parfois nécessaire de privilégier la sensibilité (voir chapitre 7) et la tolérance en cliquant sur **Options** dans les paramètres du Solveur.

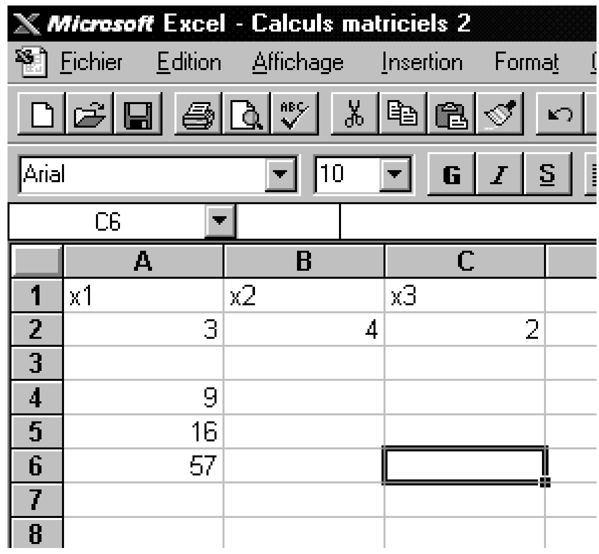


Figure 2.16 : La feuille de calcul telle qu'elle apparaît une fois le système résolu

2.15 Dépendance linéaire

Avant d'introduire la notion de dépendance linéaire, il convient de rappeler quelques notions essentielles concernant les vecteurs.

Chaque colonne d'une matrice peut être considérée comme un vecteur ; par convention, un vecteur est toujours un vecteur-colonne. Chaque ligne d'une matrice peut aussi être considérée comme un vecteur-ligne et correspond à la transposée d'un vecteur-colonne.

Les éléments d'un vecteur sont appelés composantes de ce vecteur. Lorsqu'un vecteur possède n composantes, on dit qu'il est de dimension n. La longueur ou norme d'un vecteur est définie par :

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Les vecteurs dont la longueur vaut 1 sont appelés vecteurs unitaires.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ la somme des produits de leurs composantes respectives :

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Si le produit scalaire de deux vecteurs est nul, on dit que ces vecteurs sont orthogonaux. De même, si deux vecteurs orthogonaux sont des vecteurs unitaires, on dit qu'ils sont orthonormaux.

Certains vecteurs jouent un rôle particulier, comme par exemple les vecteurs unitaires dont la $i^{\text{ème}}$ composante vaut 1 et dont toutes les autres sont nulles ; ces vecteurs sont parfois appelés vecteurs élémentaires et sont notés $\boldsymbol{e_i}$.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de dimension n peut ainsi être exprimé très simplement en terme de vecteurs élémentaires :

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

La dépendance (ou l'indépendance) linéaire constitue l'une des notions essentielles concernant les vecteurs. Pour définir cette notion, considérons m vecteurs à n composantes : $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.

Définition 2.5 *Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont dits linéairement dépendants si et seulement s'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ telles qu'une au moins soit non nulle et :*

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m = 0$$

De manière équivalente, on définit l'indépendance linéaire de m vecteurs ainsi : les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont dits linéairement indépendants si et seulement si :

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$$

Exemple 2.7 *Soit les trois vecteurs :* $\boldsymbol{x}_1 = (1 \;\; 0 \;\; 2)'$, $\boldsymbol{x}_2 = (0 \;\; 3 \;\; 1)'$ *et* $\boldsymbol{x}_3 = (1 \;\; 1 \;\; 5)'$.

Soit l'équation $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = 0$.
Nous écrivons :

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ 3c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 + 5c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Pour déterminer si ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, il s'agit de résoudre un système d'équations linéaires homogènes !

Si le système ne possède que la solution triviale $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ces trois vecteurs seront linéairement indépendants. Par contre, s'il y a une infinité de solutions, ils seront linéairement dépendants.

Dans notre cas, la matrice des coefficients est donnée par :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Comme $\mid \boldsymbol{C} \mid = 8 \neq 0$, $\boldsymbol{C}$ est non-singulière et le résultat 2.19 nous assure que ce système ne possède que la solution triviale. Par conséquent, les trois vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ et $\boldsymbol{x}_3$ sont linéairement indépendants.

Lorsqu'un vecteur peut s'écrire en fonction d'autres vecteurs, on parle de combinaison linéaire comme spécifié dans la définition 2.8.

Définition 2.6 *On dit qu'un vecteur* $\boldsymbol{y}$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ *s'il existe des constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *telles que :*

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m$$

Mentionnons, pour conclure, les différentes propriétés de la dépendance linéaire de vecteurs.

- **Propriété 1**

Si les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont linéairement dépendants, alors au moins l'un d'entre eux équivaut à la combinaison linéaire des autres.

- **Propriété 2**

Soit m vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ à n composantes. Si $m > n$, alors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont linéairement dépendants.

Les propriétés suivantes établissent le lien entre les matrices et leurs colonnes (ou lignes), dont on a vu qu'elles peuvent être considérées comme des vecteurs.

- **Propriété 3**

Lorsque $m = n$, les vecteurs correspondant aux colonnes d'une matrice sont linéairement indépendants si et seulement si cette matrice est non-singulière. (Cette propriété est également valable pour les lignes.)

- **Propriété 4**

Si une matrice est d'ordre $(n \times m)$ avec $m > n$, alors les vecteurs correspondant aux colonnes sont linéairement dépendants. (Cette propriété découle immédiatement de la propriété 2.)

- **Propriété 5**

Si le rang d'une matrice quelconque $\boldsymbol{A}$ est égal à r, alors il y a exactement r colonnes et r lignes linéairement indépendantes.

2.16 Bases et espaces vectoriels

La notion d'ensemble d'éléments qui peuvent être additionnés et multipliés par des nombres (tout en faisant encore partie de cet ensemble) conduit à une définition générale du concept d'espace vectoriel.

Définition 2.7 *Un espace vectoriel V est un ensemble d'éléments (appelés vecteurs) qui peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres (appelés scalaires) sans cesser d'appartenir à cet ensemble, de telle manière que les formules habituelles de calcul sont encore valables.*

Soit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ des éléments de l'espace vectoriel V et α, β des scalaires. En fait, tout ensemble dans lequel a été défini une addition entre les éléments de cet ensemble et une multiplication par des scalaires de telle sorte que le résultat appartient toujours à cet ensemble est un espace vectoriel si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (l'addition est commutative) ;
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (l'addition est associative) ;
3. $\exists \mathbf{0} \in V$ tel que $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$ (il existe un élément neutre unique pour l'addition) ;
4. $\forall \boldsymbol{x} \in V, \exists -\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ (il existe un élément inverse unique pour l'addition) ;
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (il existe un élément neutre unique pour la multiplication) ;
6. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ (la multiplication par un scalaire est associative) ;
7. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (la multiplication par un scalaire est distributive à gauche par rapport à l'addition) ;
8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (la multiplication par un scalaire est distributive à droite par rapport à l'addition).

L'ensemble des nombres réels $I\!R$ forme un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication usuelles. L'espace vectoriel le plus fréquemment utilisé par la suite est l'ensemble $I\!R^n$ (n entier positif) qui est l'ensemble des n-tuples $(x_1 x_2 \ldots x_n)'$, avec $x_i \in I\!R$, $i = 1, \ldots, n$.

Selon la valeur de n, le nom donné aux n-tuples est différent.

Pour $n = 2$, on parle de paires ordonnées (ou de couples), pour $n = 3$ de triplets et pour $n = 4$ de quadruples.

L'addition et la multiplication par un scalaire α sont définies respectivement par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Plusieurs concepts jouent un rôle important dans l'étude des espaces vectoriels, notamment la notion d'indépendance linéaire des vecteurs, celle de base d'un espace vectoriel et celle de dimension.

Définition 2.8 *La base d'un espace vectoriel V est un système de vecteurs de V, noté B, tel que chaque vecteur de V peut être représenté de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de B.*

Il est souvent plus pratique d'utiliser une définition équivalente basée sur la notion d'indépendance linéaire.

La base d'un espace vectoriel V est un système B de vecteurs linéairement indépendants de V, tel que chaque vecteur de V dépend linéairement des vecteurs de B.

Par la suite, notre intérêt portera essentiellement sur les bases finies d'un espace vectoriel, c'est-à-dire les bases formées par un nombre fini de vecteurs. Un espace vectoriel ayant une base finie est dit de dimension finie. Dans ce cas, on obtient le résultat 2.5.

Résultat 2.5 *Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors deux bases quelconques de V possèdent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de V.*

Dans le cas particulier de l'espace vectoriel $I\!R^n$, sa dimension est n. Soit $B = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ une base de $I\!R^n$. Un vecteur $\boldsymbol{x}$ quelconque de $I\!R^n$ peut donc s'écrire :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a_i}$$

Les scalaires α_i sont appelés coordonnées de $\boldsymbol{x}$, par rapport à cette base. À noter que ces coordonnées sont définies de manière unique puisque B est une base de $I\!R^n$. Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie et sont conventionnellement représentées par un vecteur-colonne :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Souvent, la base choisie est la base canonique, formée par les vecteurs élémentaires $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette base a en effet l'avantage d'identifier les composantes et coordonnées d'un vecteur, puisque pour tout $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

D'où $\alpha_i = x_i, \ i = 1, \ldots, n.$ En d'autres termes, dans la base canonique, $\boldsymbol{x}$ est représenté par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nous terminons ce paragraphe par une question qui se révélera importante par la suite, à savoir : "Sous quelle condition un vecteur quelconque $\boldsymbol{v} \in I\!R^n$ peut-il remplacer l'un des vecteurs d'une base pour que l'ensemble nouvellement créé soit également une base de $I\!R^n$?"

Soit un ensemble de vecteurs de base $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ et un vecteur $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \in I\!R^n$. Le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a_i}$$

Remplaçons à présent l'un des vecteurs de base, disons $\boldsymbol{a}_{k,}$ par $\boldsymbol{v}$. Le nouvel ensemble de n vecteurs est :

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$$

Pour que cet ensemble de vecteurs soit une base de $I\!R^n$, ceux-ci doivent être linéairement indépendants. Dans notre cas, $\boldsymbol{v}$ ne doit pas être combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Or $\boldsymbol{v}$ est combinaison linéaire de ces $n-1$ vecteurs si et seulement si $\alpha_k = 0$. Par conséquent, les n vecteurs formant ce nouvel ensemble sont linéairement indépendants si et seulement si $\alpha_k \neq 0$. De plus, tout vecteur $\boldsymbol{x}$ quelconque appartenant à $I\!R^n$ doit pouvoir s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, ce qui n'est possible que si $\alpha_k \neq 0$ comme l'indique le développement suivant.

Dans la base $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{x}$ s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n \\
\boldsymbol{x} &= \gamma_1 \boldsymbol{a}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \gamma_k \boldsymbol{a}_k + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{a}_n
\end{aligned}$$

Si $\alpha_k \neq 0$, $\boldsymbol{a}_k$ peut être exprimé comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \alpha_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} - \alpha_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} - \ldots - \alpha_n \boldsymbol{a}_n}{\alpha_k}$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{1}{\alpha_k} \boldsymbol{v} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \boldsymbol{a}_i$$

Par conséquent, suivant les termes de la nouvelle base, $\boldsymbol{x}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \gamma_1 \boldsymbol{a}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \gamma_k \left(\frac{1}{\alpha_k} \boldsymbol{v} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \boldsymbol{a}_i \right) + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{a}_n \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \gamma_k \right) \boldsymbol{a}_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \boldsymbol{v} \\
\Longrightarrow \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \gamma_k \right) \boldsymbol{a}_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

La dernière implication provient du fait que le coefficient de $\boldsymbol{a}_k$ est nul, $\gamma_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_k}\gamma_k = 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{x}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Exemple 2.8 *Soit la base canonique de $I\!R^3$:*

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ et le vecteur } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique, $\boldsymbol{v}$ s'écrit $\boldsymbol{v} = 7\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$. Ainsi, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 2$.

Si l'on veut remplacer l'un des vecteurs de base par $\boldsymbol{v}$ et que ce nouvel ensemble de trois vecteurs forme une base, seul $\boldsymbol{e}_1$ ou $\boldsymbol{e}_3$ peut être remplacé puisque la deuxième coordonnée de $\boldsymbol{v}$ est nulle. Formons une nouvelle base de $I\!R^3$ en remplaçant $\boldsymbol{e}_3$ par $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}$.

Soit à présent le vecteur $\boldsymbol{x} = (4\ \ 10\ \ 6)'$ dans la base canonique $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$: $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3$, où $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 10$ et $\gamma_3 = 6$.

Pour exprimer $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base, on utilise l'expression trouvée précédemment :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\gamma_k)\boldsymbol{a}_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k}\boldsymbol{v}$$

On trouve alors :

$$\boldsymbol{x} = (4 - \frac{7}{2}6)\boldsymbol{e}_1 + (10 - \frac{0}{2}6)\boldsymbol{e}_2 + \frac{6}{2}\boldsymbol{v}$$

$$= -17\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{v}$$

Les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans cette nouvelle base sont :

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.17 Convexité

Soit $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ deux vecteurs de IR^n. Le segment de droite joignant l'extrémité de ces vecteurs est l'ensemble des points :

$$D = \{\boldsymbol{x} \in IR^n \mid \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Exemple 2.9 *Considérons les deux vecteurs* $\boldsymbol{x}_1 = (4\ \ 1)'$ *et* $\boldsymbol{x}_2 = (2\ \ 5)'$. *Notons* $\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$ *le segment de droite joignant les extrémités de* $\boldsymbol{x}_1$ *et* $\boldsymbol{x}_2$.

$$\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} = \left\{\boldsymbol{x} \in IR^2 \mid \boldsymbol{x} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

En faisant varier la valeur de λ *entre 0 et 1 , on obtient les points de ce segment.*

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0 &&: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\lambda &= \frac{1}{4} &&: \quad \boldsymbol{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\lambda &= \frac{1}{2} &&: \quad \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\lambda &= \frac{3}{4} &&: \quad \boldsymbol{x} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\lambda &= 1 &&: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ces points sont représentés sur la figure 2.18.

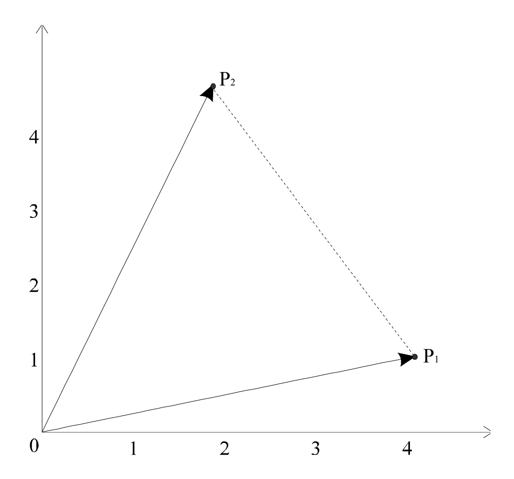


Figure 2.18 : Segment de droite joignant $\boldsymbol{P}_1$ à $\boldsymbol{P}_2$

Définition 2.9 *Un ensemble S non vide de IR^n est dit convexe si le segment de droite joignant deux points quelconques de S se trouve dans S :*

$$\text{si } \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S \text{ et } 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ alors } \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in S$$

L'intersection de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe. Par convention, un ensemble contenant un seul point est convexe.

Les figures 2.19 et 2.20 représentent respectivement des ensembles convexes et non-convexes.

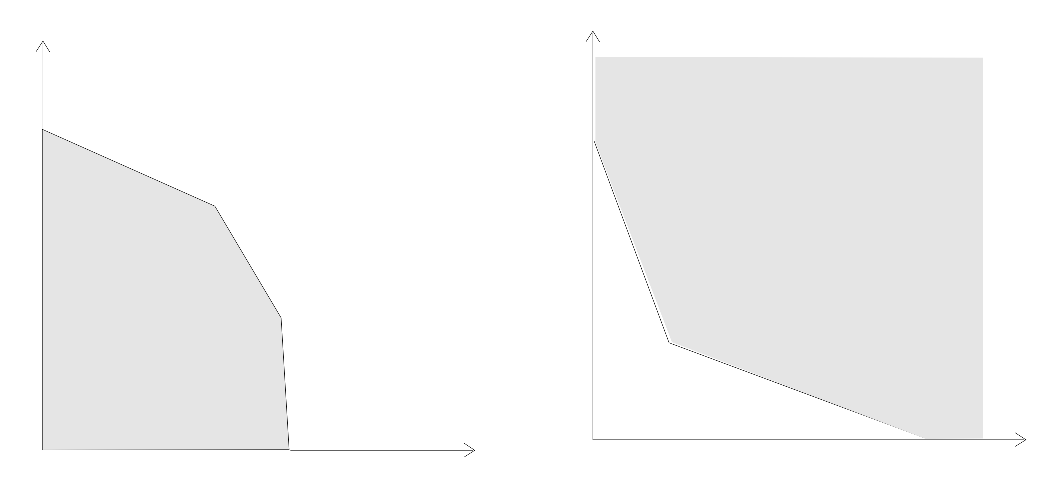


Figure 2.19 : Ensembles convexes

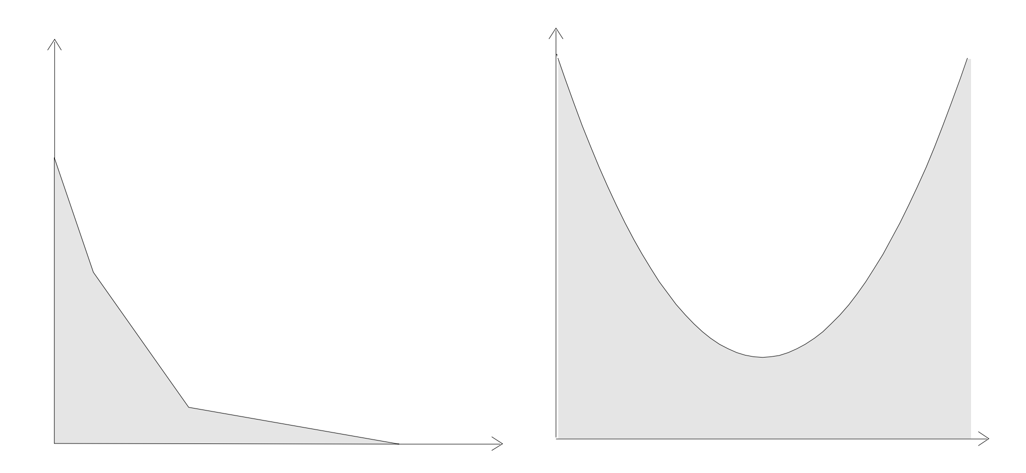


Figure 2.20 : Ensembles non-convexes

Dans $I\!R^n$, l'ensemble des points $\boldsymbol{x}$ vérifiant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b$$

est appelé hyperplan. Un hyperplan $\boldsymbol{c'x} = \boldsymbol{b}$ divise $I\!R^n$ en trois ensembles mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs. Il s'agit de : $H_1 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c'x} < b\}$, $H_2 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c'x} = b\}$ et $H_3 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c'x} > b\}$. Les ensembles H_1 et H_3 sont appelés demi-espaces ouverts et sont convexes.

Définition 2.10 *Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est appelé combinaison convexe des p vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_p$ s'il existe des constantes non-négatives λ_1, λ_2, ..., λ_p avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1$ telles que $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$.*

Un vecteur $\boldsymbol{x}$ est un point extrême (sommet) d'un ensemble S convexe s'il n'existe pas de points $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ($\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$) dans l'ensemble pour lesquels $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$, $0 < \lambda < 1$. En d'autres termes, un point extrême de S ne peut être exprimé comme combinaison convexe de deux points distincts de S. À noter ici les inégalités strictes imposées à λ.

Exemple 2.10 *Soit le rectangle S défini par :*

$$S = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ \ 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

et représenté sur la figure 2.21.

Cet ensemble est convexe et ses points extrêmes sont $P_1(0;0)$, $P_2(0;2)$, $P_3(1;2)$, $P_4(1;0)$. À noter que $P_5(1/2;2)$ n'est pas un point extrême puisque $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

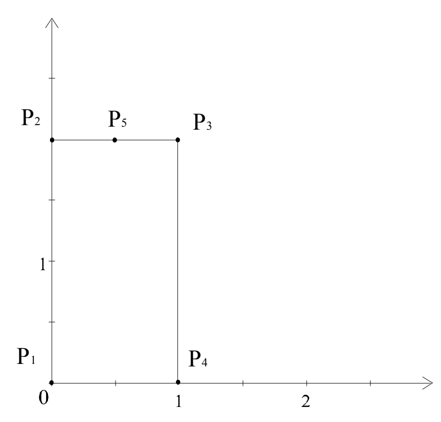


Figure 2.21 : P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des points extrêmes

2.18 Inéquations linéaires

Par opposition à une équation linéaire, une inéquation linéaire est obtenue en remplaçant le signe d'égalité par un signe d'inégalité :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} b$$

L'ensemble des valeurs des variables $x_1, \ldots, x_n$ qui vérifient cette inéquation est appelé solution de l'inéquation linéaire. Il s'agit d'un demi-espace ouvert ou fermé selon que l'inégalité est respectivement stricte $(<, >)$ ou large $(\leq, \geq)$.

Un système d'inéquations linéaires s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

ou de manière plus concise sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires est donc une intersection finie de demi-espaces. Il s'agit d'un ensemble convexe appelé polygone dans le cas de deux variables et polyèdre dans le cas général.

Exemple 2.11 *Soit le système d'inéquations :*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -4x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Chaque inéquation linéaire peut être représentée graphiquement en commençant par dessiner l'équation correspondante. Pour vérifier de quel demi-espace il s'agit, il suffit d'introduire un point (par exemple l'origine) dans l'inéquation et de vérifier si celle-ci est satisfaite. Les inéquations ci-dessus sont représentées sur les figures 2.22, 2.23 et 2.24. La surface hachurée représente l'ensemble des solutions de chaque inéquation.

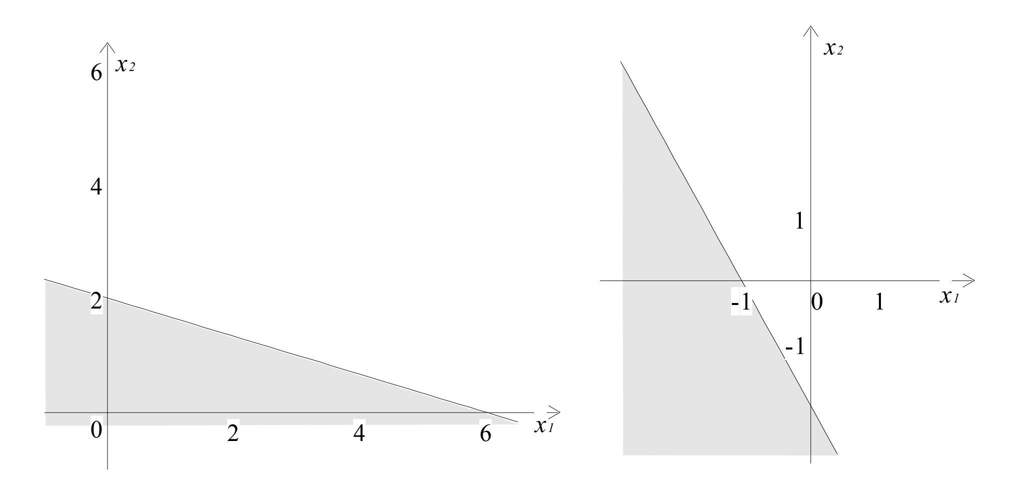


Figure 2.22 : $x_1 + 3x_2 \leq 6$

Figure 2.23 : $-4x_1 - 2x_2 \geq 4$

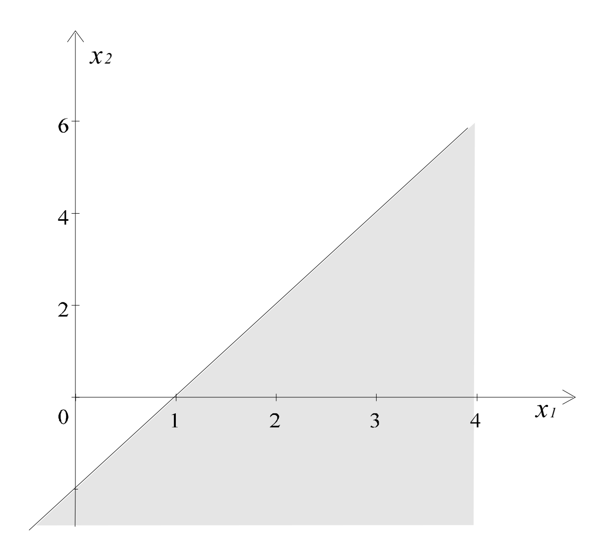


Figure 2.24 : $2x_1 - x_2 \geq 2$

L'ensemble des solutions satisfaisant simultanément le système des trois inéquations ci-dessus est l'intersection de ces trois ensembles. Il est représenté sur la figure 2.25. On voit qu'il s'agit d'un ensemble non-borné possédant un point extrême (0 ;-2).

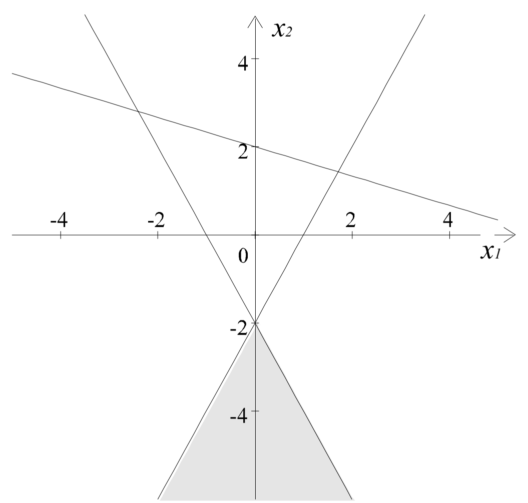


Figure 2.25 : Ensemble des solutions satisfaisant simultanément le système d'inéquations

Le **Solveur Excel** ne résoud pas graphiquement un système d'inéquations linéaires, mais le considère comme un ensemble de contrainte. La procédure

est similaire à la résolution d'un système d'équations linéaires. Il faut d'abord nommer les cellules contenant les variables et saisir la partie des trois inéquations qui se trouve à gauche du signe d'inégalité.

Microsoft Excel - Calculs matriciels 2

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils D

Arial 10 G I S

x1_ 1

	A	B	C	D
1	x1	x2		
2	1	1		
3				
4	=A2+3*B2			
5	=-4*A2-2*B2			
6	=2*A2-B2			
7				

Figure 2.26 : Saisie des inéquations

Pour que le **Solveur** fonctionne, il faut lui fournir une valeur cible. Dans le cas d'un système d'inéquations, il est recommandé de choisir une des variables comme valeur cible. Les cellules variables et les contraintes sont définies de la même manière que dans les systèmes d'équations linéaires. En ce qui concerne le critère "**Egale à**", il faut opter entre "**Max**", "**Min**" ou "**Valeur**". Ce choix de valeur cible s'avèrera capital pour la solution proposée. Dans l'exemple, nous avons choisi la variable x_2 comme valeur cible et nous la voulons maximale.

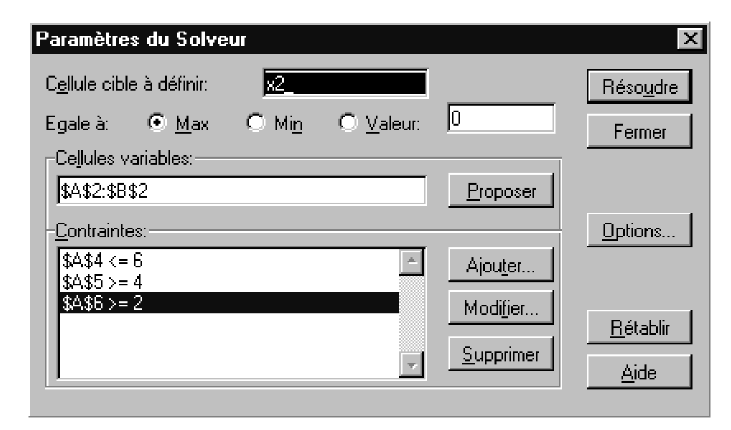


Figure 2.27 : Boîte de dialogue du Solveur pour ce système d'inéquations

Il suffit ensuite de cliquer sur Résoudre et le résultat s'affiche sur la feuille de calcul. On y lit en particulier les valeurs de x_1 et x_2, ainsi que les résultats des équations pour ces valeurs de x_1 et x_2.

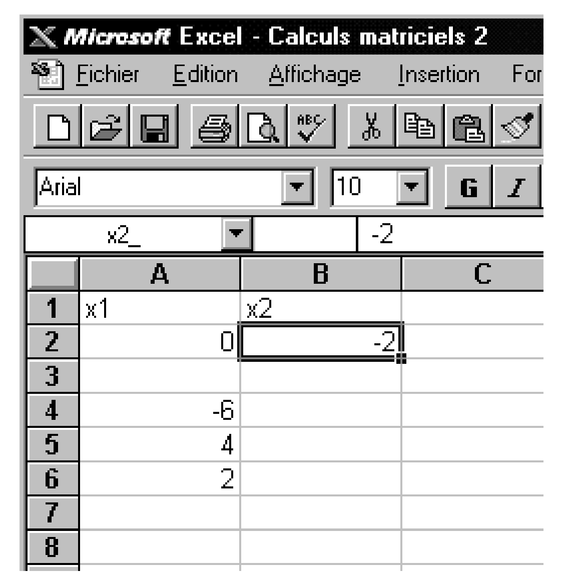


Figure 2.28 : Solution trouvée par le **Solveur**

Notons que les résultats changent si l'on modifie les paramètres de la valeur cible et que, dans bien des cas, aucune solution ne sera trouvée. Si, au lieu de choisir le maximum de la valeur cible, nous avions opté pour le minimum, ou si nous avions choisi la variable x_1 comme valeur cible, le Solveur n'aurait pas trouvé de convergence.

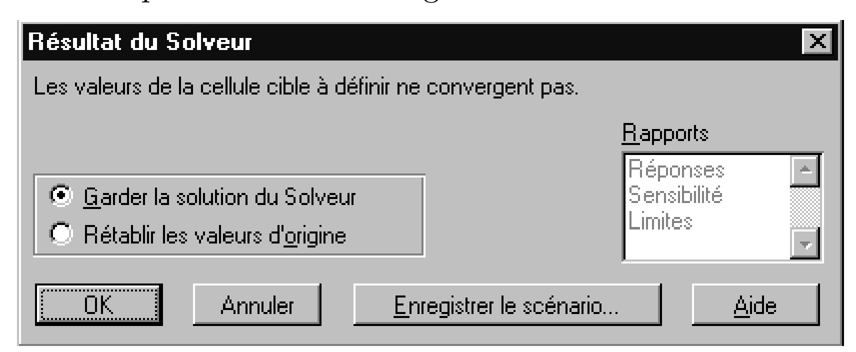


Figure 2.29 : Le **Solveur** ne trouve pas de solution s'il doit minimiser x_2

De même, si l'on définit une valeur fixe pour l'une des deux variables, et que celle-ci se trouve à l'extérieur de l'ensemble convexe, le Solveur ne trouve pas de solution satisfaisant aux contraintes et affiche un message d'erreur.

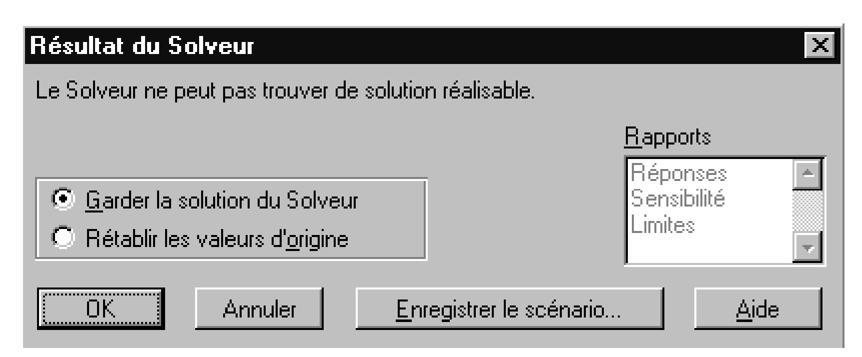


Figure 2.30 : Résultat du Solveur en fixant $x_2 = 10$

Exemple 2.18 *En modifiant les inégalités du système précédent de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -4x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

on obtient pour l'ensemble des solutions, un ensemble fermé borné représenté sur la figure 2.31.

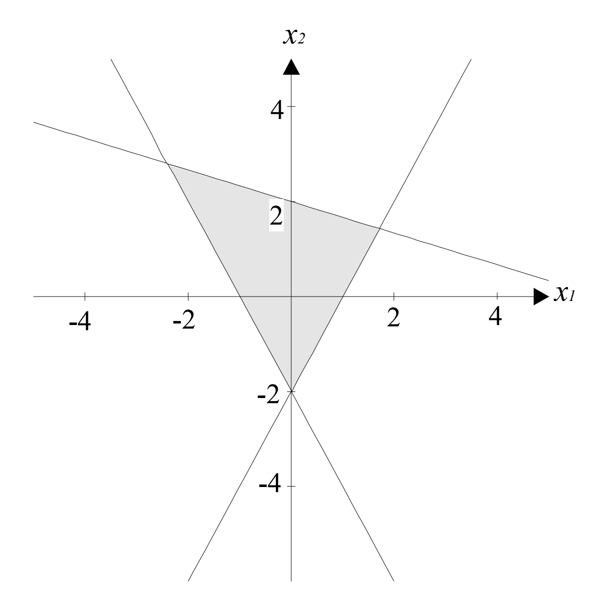


Figure 2.31 : Ensemble des solutions fermé borné

Dans cette situation, si les paramètres du **Solveur** ont été correctement choisis, Excel proposera **une** solution à l'intérieur de l'ensemble convexe.

2.19 Exercices

1. Calculer les produits $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ (quand ils sont définis).

   (a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

   (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Trouver l'inverse de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Trouver le rang des matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement dépendants ou indépendants ?

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)'$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,0)'$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)'$

   (b) $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,3)'$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-5,1)'$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-2,-1)'$

5. Déterminer si le système suivant est compatible et s'il possède une solution unique ou plusieurs solutions. Trouver ensuite toutes les solutions de base possibles et définir si elles sont dégénérées ou non.

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 10 \end{array}$$

6. Soient deux points donnés de IR^2 : $\boldsymbol{x}_1 = (2,4)'$ et $\boldsymbol{x}_2 = (6,1)'$. Trouver le segment $\overline{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2}$ et les points de ce segment pour $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{4}$ et $\lambda = 1$. Donner une interprétation graphique.

7. Lesquels de ces ensembles sont convexes ?

   (a) $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 12\}$
   (b) $S = \{(x_1, x_2 \mid x_1 \geq 3, x_1 \leq 5\}$
   (c) $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

8. Considérons le triangle qui a pour sommets $A = (0,0)$, $B = (6,0)$ et $C = (3,3)$. Exprimer le point $M = (3,1)$ comme une combinaison convexe de ces trois points. Donner une interprétation graphique.

9. Soient les trois vecteurs de IR^2 : $\boldsymbol{v}_1 = (2,2)'$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,2)'$ et $\boldsymbol{v}_3 = (3,7)'$.

   Trouver le point M déterminé par la combinaison convexe avec $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{8}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{8}$.

10. Représenter graphiquement les régions déterminées par les inéquations suivantes :

$$
\begin{array}{llcr}
\text{a)} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 + 4x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\text{b)} & x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & \geq & 2 \\
 & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\text{c)} & 2x_1 + 6x_2 & \geq & 6 \\
 & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
\text{d)} & x_1 + x_2 & \geq & 2 \\
 & x_2 - 3x_1 & \leq & 0 \\
 & 3x_2 - x_1 & \geq & 0 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
 & 0 \leq x_1 & \leq & 2 \\
 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



HESSE Ludwig Otto (1811-1874)

Le Mathématicien allemand né à Königsberg en 1811, Hesse, est l'élève de Jacobi à l'université de sa ville natale où il obtient son doctorat en 1840. Il y enseigne alors la chimie et la physique jusqu'en l856, année où il est nommé à l'université de Heidelberg. Il y restera douze ans avant d'obtenir un poste à Munich, où il décédera en 1874.

La science lui doit notamment le développement des théories des fonctions algébriques et des invariants. Il introduit le déterminant hessien tiré de la matrice hessienne dans un article paru en 1942 et traitant des courbes cubiques et quadratiques.

Chapitre 3

Optimisation classique

3.1 Introduction

Euclide formulait déjà des problèmes d'optimisation au IIIe siècle avant J.-C. Ce prolifique mathématicien de l'Antiquité a rédigé l'un des plus célèbres textes de l'histoire des mathématiques : *les Éléments.* Cette œuvre comprend treize livres et couvre des domaines tels que la géométrie plane et solide ou la théorie des nombres rationnels et irrationnels. Durant vingt siècle, ce traité fut l'ouvrage de référence dans l'enseignement mathématique. Plus de mille éditions en furent tirées, depuis la première en 1482. Sir Isaac Newton (1642-1727), auteur du célèbre *Mathematical Principles of Natural Philosophy,* ainsi que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) offrirent, à la fin du XVIIe siècle, les premiers outils de résolution de certains problèmes d'optimisation relatifs à la géométrie et à la physique. Ils avaient en effet inventé, simultanément mais néanmoins indépendamment, le calcul différentiel.

Comme indiqué au chapitre 1, l'optimisation classique se scinde en deux types de problèmes : l'optimisation sans contrainte et l'optimisation avec contraintes. Dans les deux cas, le but consiste à trouver les valeurs qui maximisent ou minimisent une fonction. Toutefois, dans l'optimisation avec contraintes, les solutions sont soumises à des restrictions (contraintes). Les problèmes d'optimisation en économie sont souvent caractérisés par un nombre très élevé de variables et par la nécessité de trouver des solutions non négatives. C'est donc un type d'optimisation avec contraintes.

Nous allons reprendre ces deux types d'optimisation et les développer dans ce chapitre.

3.2 Optimisation classique sans contrainte

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle. Si la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues en un point où de croissante la fonction devient décroissante, alors elle possède un maximum. En d'autres termes, la pente de la tangente passe du positif au négatif. Le raisonnement contraire est valable pour un minimum. Dans les deux cas, il s'agit d'un point où la pente de la tangente est nulle. Comme la pente de la tangente est donnée par la première dérivée de la fonction, il faut annuler la première dérivée de f pour obtenir les points candidats (points où la fonction est susceptible de présenter un minimum ou un maximum). Pour chaque point candidat, il faut déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Il existe deux critères pour déterminer si un point candidat est un extremum (minimum ou maximum). Le premier critère est fourni par le résultat 3.1.

Résultat 3.1 *Si le signe de la dérivée est positif puis devient négatif quand x croît, alors le point candidat est un maximum de la fonction.*

Si le signe de la dérivée est négatif puis devient positif quand x croît, alors le point candidat est un minimum de la fonction.

La figure 3.1 illustre ce résultat.

Le second critère fait appel à la dérivée seconde de la fonction. La dérivée seconde $f^{''}(x)$ d'une fonction est la dérivée de la dérivée première $f^{'}(x)$. Celle-ci mesure le taux de croissance ou de décroissance de $f^{'}(x)$, autrement dit le taux de croissance ou de décroissance de la pente de la tangente à la courbe. Le signe de $f^{''}(x)$ au point candidat $x = x_0$ fournit les renseignements nécessaires. Si $f^{''}(x_0)$ est positive, la pente de la tangente croît quand x croît en passant par x_0. Inversement, si $f^{''}(x_0)$ est négative, la pente de la tangente décroît quant x croît en passant par x_0. D'où le résultat 3.2 basé sur la dérivée seconde.

Résultat 3.2 *Soit $P(x_0; f(x_0))$ le point en lequel : $f'(x_0) = 0$.*

Alors si en ce point :

1. $f^{''}(x_0) < 0$, *il s'agit d'un maximum.*
2. $f^{''}(x_0) > 0$, *il s'agit d'un minimum.*

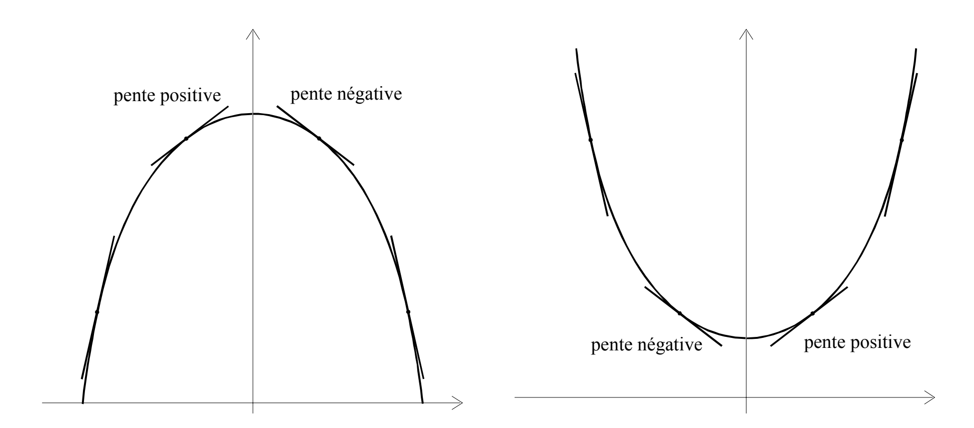


Figure 3.1 : Maximum et minimum d'une fonction à une variable

Exemple 3.1 *Soit la fonction* $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

Calculons sa première dérivée :

$$f^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

et sa deuxième dérivée :

$$f^{''}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(x-1)$$

On obtient les points candidats de la fonction en résolvant l'équation $f'(x) = 0$:

$$3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y_1 = 5$ et $y_2 = 1$.

Déterminons la nature des points candidats en utilisant le résultat 3.2 $f''(0) = -6 < 0$ et $f''(2) = 6 > 0$.

La fonction a donc un maximum en $x_1 = 0$ et un minimum en $x_2 = 2$. Les coordonnées du maximum sont (0 ;5) et celles du minimum (2 ;1).

Par conséquent, dans un voisinage convenablement choisi du point $x_1 = 0$, la valeur de la fonction est plus petite que $f(x)$. On dit que la fonction possède un **maximum local** ou **relatif** au point $x_1 = 0$. Au point $x_2 = 2$, on dit que la fonction possède un **minimum local** ou **relatif**. Ces deux valeurs, maximum et minimum, sont appelées des **extrema locaux** ou **relatifs**, parce qu'il existe des valeurs de x pour lesquelles la fonction prend des valeurs plus grandes que 5 ou plus petites que 1, comme l'illustre la figure 3.2 (a) :

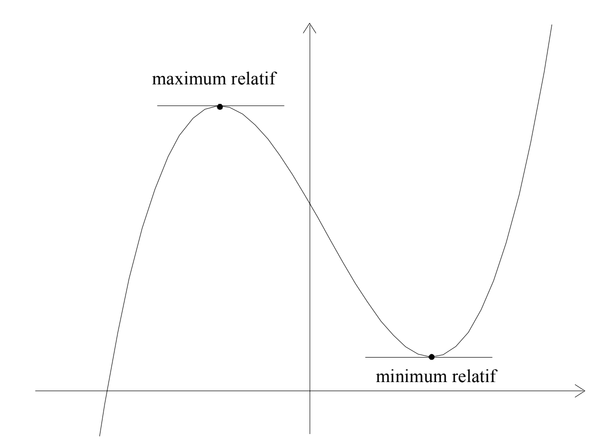


Figure 3.2 (a) : Extrema locaux

Cependant, on peut définir ce que l'on appelle un **maximum** ou un **minimum global** ou **absolu**. En ce point, la fonction prend la valeur la plus grande (ou la plus petite) sur un intervalle donné ; la figure 3.2 (b) donne un exemple d'extrema relatifs et absolus.

.

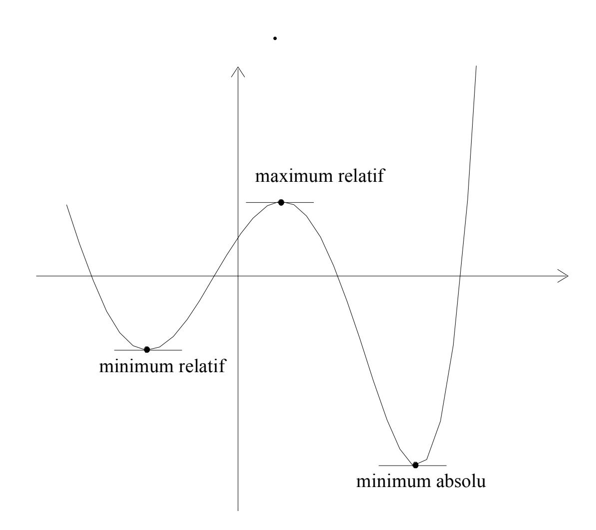


Figure 3.2 (b) : Extrema relatifs et absolus

Exemple 3.2 *Un fabricant de postes de télévision produit q postes par semaine à un coût total de* $C = 6q^2 + 80q + 5000$*. C'est un monopoleur et son prix s'exprime par la relation* $p = 1080 - 4q$*. Montrons que le bénéfice net maximum est atteint lorsque la production est de 50 postes par semaine.*

On sait que le revenu de la firme est égal au prix multiplié par la quantité :

$$\begin{aligned} R = pq \quad &= (1080 - 4q)q \\ &= 1080q - 4q^2 \end{aligned}$$

Son bénéfice s'exprime par :

$$\begin{aligned} B = R - C \quad &= 1080q - 4q^2 - (6q^2 + 80q + 5000) \\ &= -10q^2 + 1000q - 5000 \end{aligned}$$

La dérivée de cette fonction est :

$$B^{'} = -20q + 1000$$

La solution de l'équation $B^{'} = 0$ est :

$$\begin{aligned} -20q + 1000 = 0 \\ q = 50 \end{aligned}$$

Sa dérivée seconde est :

$$B^{''} = -20 < 0$$

Par conséquent, la fonction de bénéfice présente un maximum en $x = 50$. Ce maximum est un maximum global car la fonction est une parabole, comme l'indique la figure 3.3. Pour ce volume de production, le bénéfice réalisé s'élève à:

$$B = -10(50)^2 + 1000(50) - 5000 = 20000$$

Le prix du poste de télévision est de :

$$p = 1080 - 4(50) = 880$$

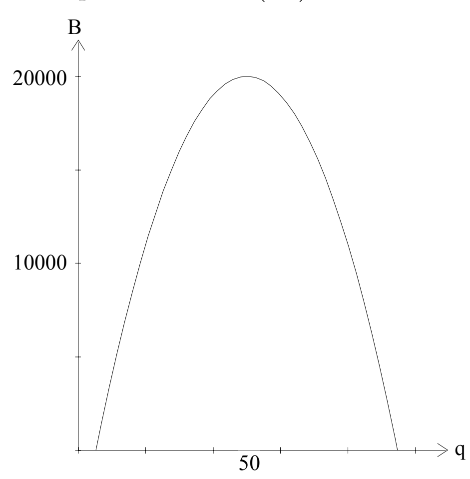


Figure 3.3 : Fonction bénéfice ($B = -10q^2 + 1000q - 5000$)

Considérons à présent le cas des fonctions à plusieurs variables indépendantes. Des exemples simples en sont fournis par des formules de mathématiques élémentaires. Ainsi, dans la formule de calcul du volume V d'un cylindre droit à base circulaire, $V = \pi r^2 h$, V est une fonction à deux variables indépendantes : r (rayon du cercle de base) et h (hauteur). De la même manière, dans la formule qui donne l'aire A d'un triangle quelconque,
$A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$, A est une fonction à trois variables indépendantes, x, y et α, qui traduisent respectivement la longeur de deux côtés du triangle et l'angle formé par ces deux côtés.

Pour les fonctions à deux variables, $z = f(x, y)$, le graphe est une surface dans l'espace à trois dimensions. Une telle fonction présente un maximum au point $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, si $f(x_0, y_0)$ atteint une valeur supérieure à toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$, comme indiqué sur la figure 3.4 (a). De même, $f(x, y)$ possède un minimum au point $P(x_0, y_0; f(x_0, y_0))$, si $f(x_0, y_0)$ atteint une valeur inférieure à toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$; ce cas est illustré par la figure 3.4 (b). Il en résulte qu'au point $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, il existe un **plan tangent horizontal**. Ce plan tangent est engendré par deux tangentes, elles-mêmes déterminées par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi, la condition nécessaire à l'existence d'un extremum est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

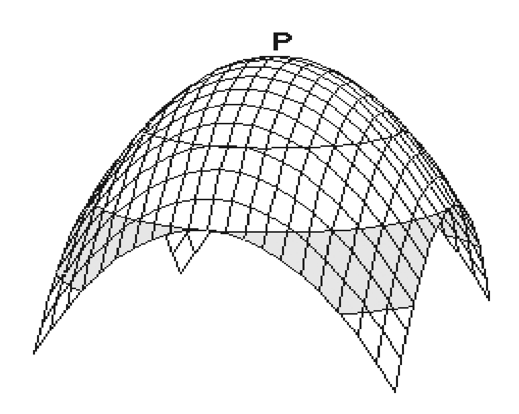


Figure 3.4 (a) : Maximum au point P

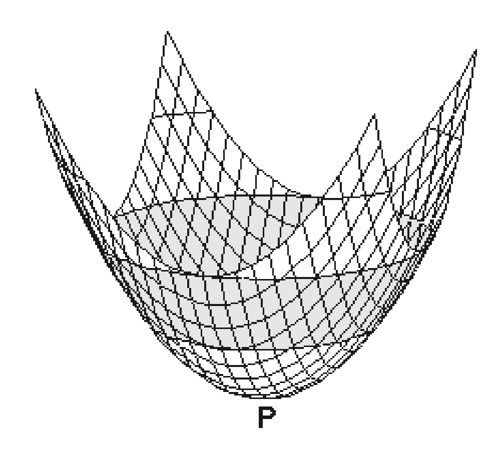


Figure 3.4 (b) : Minimum au point P

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, il existe des fonctions pour lesquelles $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ sans qu'il existe un extremum en ce point. Dans ce cas, on parle de **point-selle**. Bien que les deux tangentes soient horizontales, il est toujours possible de trouver un point situé au-dessus du point-selle et un autre au-dessous, ceci quelque soit le voisinage du point-selle considéré. Notons encore, qu'en un point-selle la fonction présente un minimum pour l'une des variables et un maximum pour l'autre variable. La figure 3.5 illustre cette situation.

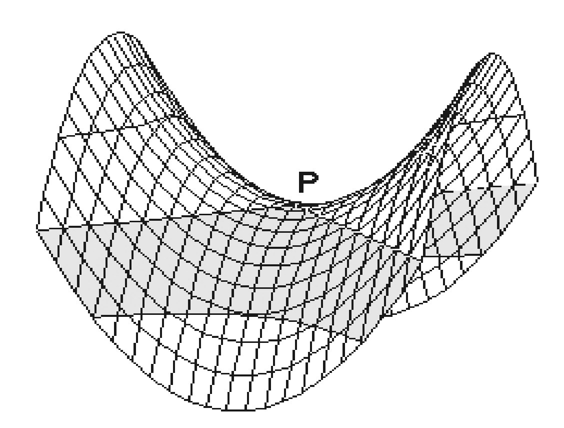


Figure 3.5 : Point-selle en P

Il faut donc remplir une condition suffisante qui est la suivante :

$$\alpha = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

où :

- $f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$, c'est-à-dire que la fonction a été dérivée deux fois par rapport à x,
- $f_{yy} = \partial^2 f/\partial y^2$, ce qui signifie que la fonction a été dérivée deux fois par rapport à y,
- $f_{xy}^2 = (\partial^2 f/\partial x \partial y)^2$, c'est-à-dire que la première dérivée se fait par rapport à y et la deuxième par rapport à x ; cette expression est ensuite élevée au carré.

Le résultat 3.3 résume la situation pour les fonctions à deux variables.

Résultat 3.3 *Soit $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ le point en lequel :*

$$\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$$

Alors si en ce point :

1. $f_{xx} > 0$ *et* $\alpha > 0$, f *possède un minimum au point* P.
2. $f_{xx} < 0$ *et* $\alpha > 0$, f *possède un maximum au point* P.
3. $\alpha < 0$, f *ne possède ni minimum ni maximum au point* P, *mais un point-selle.*
4. $\alpha = 0$, *on ne peut pas conclure.*

Notons que la condition suffisante évoquée ci-dessus provient d'un résultat plus général concernant les fonctions à n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Avant d'énoncer ce résultat général, introduisons la matrice des secondes dérivées partielles. Celle-ci joue un rôle clé dans la détermination des extrema d'une fonction à plusieurs variables. Cette matrice est appelée **matrice hessienne** et se présente sous la forme :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} fx_1^2 & fx_1x_2 & \dots & fx_1x_n \\ fx_2x_1 & fx_2^2 & \dots & fx_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ fx_{n-1}x_1 & fx_{n-1}x_2 & \dots & fx_{n-1}x_n \\ fx_nx_1 & fx_nx_2 & \dots & fx_n^2 \end{pmatrix}$$

où $f_{x_1^2} = \partial^2 f/\partial x_1^2$, $f_{x_1x_2} = \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$, ..., et $fx_n^2 = \partial^2 f/\partial x_n^2$

On appelle mineurs principaux de la matrice $\boldsymbol{H}$, notés $\triangle_i$, les déterminants des sous-matrices de $\boldsymbol{H}$ obtenues en lui retirant ses $n-i$ dernières lignes et colonnes $(i = 1, \dots, n)$.

Dans le cas général, la recherche des extrema d'une fonction à plusieurs variables est basée sur le résultat 3.4.

Résultat 3.4 *Soit P le point en lequel :*

$$\partial f/\partial x_1 = \partial f/\partial x_2 = \ldots = \partial f/\partial x_n = 0.$$

Alors:

1. *si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point P sont tous strictement positifs, il s'agit d'un minimum.*

2. *si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point P sont de signes alternés, le premier étant strictement négatif, il s'agit d'un maximum.*

3. *si les mineurs principaux ne vérifient pas l'une des conditions ci-dessus prises au sens large (c'est-à-dire respectivement "positif ou nul" et "négatif ou nul"), il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum, mais d'un point-selle.*

4. *si les conditions (1) et (2) se vérifient au sens large, alors on ne peut pas conclure.*

Dans le cas de fonctions à deux variables, on retrouve le résultat 3.3. En effet, dans ce cas, tout comme $f_{xy} = f_{yx}$, on a :

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= f_{xx} \\ \triangle_2 &= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \triangle_1 > 0 \text{ et } \triangle_2 > 0 \Longrightarrow \text{minimum.} \\ \triangle_1 < 0 \text{ et } \triangle_2 > 0 \Longrightarrow \text{maximum.} \\ \triangle_1 \text{ quelconque et } \triangle_2 < 0 \Longrightarrow \text{point-selle.} \\ \triangle_1 \text{ quelconque et } \triangle_2 = 0 \Longrightarrow \text{on ne peut pas conclure.} \end{cases}$$

Exemple 3.3 *Soit la fonction $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.*

Les candidats aux extrema s'obtiennent en résolvant le système d'équations : $\partial f/\partial x = 0$ et $\partial f/\partial y = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Il existe donc un point candidat en $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; ce point est forcément un minimum puisque $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall x \neq 0, \forall y \neq 0$, comme la figure 3.6 en témoigne. En effet, en appliquant le résultat 3.4, on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

La matrice hessienne est donc définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ici, $\triangle_1 = 2$ et $\triangle_2 = 4$. Par conséquent, f possède un minimum en $(0; 0; 0)$.

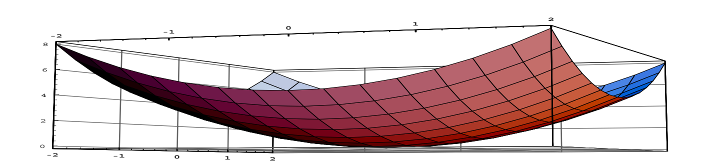


Figure 3.6 : Graphe de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Exemple 3.4 *Soit* $f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y - 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

Les points candidats s'obtiennent en résolvant les deux équations :

$$8x - y - 3x^2 = 0 \tag{3.1}$$

$$-x + 2y = 0 \tag{3.2}$$

Après substitution de $x = 2y$ (tiré de (3.2)) dans (3.1), on trouve :

$$-12y^2 + 15y = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = \dfrac{5}{4} \end{array}$$

Comme $x = 2y$, on trouve $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{5}{2}$

Il existe donc deux points candidats : $P_1(0;0;0)$ et $P_2(\frac{5}{2};\frac{5}{4};\frac{125}{16})$.

La matrice hessienne est définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 8-6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Évaluons la matrice hessienne pour le premier point candidat $x_1 = 0$, $y_1 = 0$:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\triangle_1 = 8 > 0$ et $\triangle_2 = 15 > 0$, il s'agit d'un minimum.

Pour le second point candidat $x = \dfrac{5}{2}$ et $y = \dfrac{5}{4}$, on obtient :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\triangle_1 = -7 < 0$ et $\triangle_2 = -15 < 0$, il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum, mais d'un point-selle de la fonction.

Exemple 3.5 *Soit* $f(x,y,z) = x^4 - 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 81$.

Annulons les premières dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 34x - 2y = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x - 2z = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2y = 0 \tag{3.5}$$

Par simplification, de (3.5) on tire :

$$y = z \tag{3.6}$$

Substituons (3.6) dans (3.4) :

$$\begin{aligned} 4y - 2x - 2y &= 0 \\ 2y - 2x &= 0 \\ x &= y \end{aligned} \tag{3.7}$$

En introduisant (3.6) et (3.7) dans (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 34x - 2x &= 0 \\ 4x^3 - 36x &= 0 \\ 4x(x^2 - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation a trois solutions :

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = -3, \;\; x_3 = 3$$

Les valeurs correspondantes de y et de z sont :

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \quad y_2 = -3 \quad y_3 = 3 \\ z_1 &= 0 \quad z_2 = -3 \quad z_3 = 3 \end{aligned}$$

Les deuxièmes dérivées partielles sont :

$$\begin{array}{lll} \partial^2 f/\partial x^2 = 12x^2 - 34 & \partial^2 f/\partial x \partial y = -2 & \partial^2 f/\partial x \partial z = 0 \\ \partial^2 f/\partial y \partial x = -2 & \partial^2 f/\partial y^2 = 4 & \partial^2 f/\partial y \partial z = -2 \\ \partial^2 f/\partial z \partial x = 0 & \partial^2 f/\partial z \partial y = -2 & \partial^2 f/\partial z^2 = 2 \end{array}$$

Pour le point $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, la matrice hessienne est définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \quad -34 \\ \triangle_2 &= \quad -140 \\ \triangle_3 &= \quad -144 \end{aligned}$$

D'après le résultat 3.4, ces trois mineurs principaux ne vérifient ni la condition 1 ni la condition 2, prises au sens large.

La fonction présente donc un point-selle en $x_1 = y_1 = z_1 = 0$.

Pour les points $x_2 = y_2 = z_2 = -3$ et $x_3 = y_3 = z_3 = 3$, la matrice hessienne est la même :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 74 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \quad 74 \\ \triangle_2 &= \quad 292 \\ \triangle_3 &= \quad 288 \end{aligned}$$

Ainsi, pour chacun de ces deux points, la fonction présente un minimum.

Exemple 3.6 *Une firme aéronautique fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. Soit q_1 le nombre d'avions vendus sur le premier marché et q_2 le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les fonctions de demande dans les deux marchés respectifs sont :*

$$p_1 = 60 - 2q_1$$
$$p_2 = 80 - 4q_2$$

P_1 et p_2 sont les deux prix de vente. La fonction de coût total de la firme est :

$$C = 50 + 40q$$

où q est le nombre total d'avions produits. Il faut trouver le nombre d'avions que la firme doit vendre sur chaque marché pour maximiser son bénéfice.

Comme $q = q_1 + q_2$, la fonction de coût devient :

$$\begin{aligned} C &= 50 + 40q \\ &= 50 + 40(q_1 + q_2) \\ &= 50 + 40q_1 + 40q_2 \end{aligned}$$

Le revenu total R s'obtient en multipliant le prix par la quantité sur chaque marché :

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (60 - 2q_1)q_1 + (80 - 4q_2)q_2 \\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2 \end{aligned}$$

On obtient le bénéfice B en calculant la différence entre le revenu et le coût :

$$\begin{aligned} B &= R - C \\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2 - (50 + 40q_1 + 40q_2) \\ &= 20q_1 - 2q_1^2 + 40q_2 - 4q_2^2 - 50 \end{aligned}$$

Annulons les premières dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \partial B/\partial q_1 &= -4q_1 + 20 = 0 \Rightarrow q_1 = 5 \\ \partial B/\partial q_2 &= -8q_2 + 40 = 0 \Rightarrow q_2 = 5 \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que le point candidat $(q_1; q_2) = (5; 5)$ est un maximum ; pour cela, calculons les deuxièmes dérivées partielles :

$$\partial^2 B/\partial q_1^2 = -4 \quad \partial^2 B/\partial q_2^2 = -8 \quad \partial^2 B/\partial q_1 \partial q_2 = 0$$

La matrice hessienne est donc :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= -4 < 0 \\ \triangle_2 &= 32 > 0 \end{aligned}$$

Comme $\triangle_1 < 0$ et $\triangle_2 > 0$, il s'agit d'un maximum.
Le bénéfice maximum réalisé est égal à :

$$20(5) - 2(5)^2 + 40(5) - 4(5)^2 - 50 = 100$$

Quant aux prix, ils s'élèvent respectivement à :

$$\begin{aligned} p_1 &= 60 - 2(5) = 50 \\ p_2 &= 80 - 4(5) = 60 \end{aligned}$$

Exemple 3.7 ***Cas de la régression linéaire simple*** *(méthode des moindres carrés)*

Les méthodes de régression permettent de dégager les relations qui existent entre les variables, particulièrement entre les variables dont la relation est importante. On peut citer en exemple la relation entre le poids et la taille des individus. Ce type de problèmes scientifiques existait bien avant que le nom “régression” leur fut donné par Sir Francis Galton (1822-1911), anthropologiste anglais et cousin de Charles Darwin, lorsqu'il s'intéressa aux

problèmes d'hérédité. Lors de ses recherches, Galton remarqua que les pères de grande taille avaient des fils de grande taille mais qu'**en moyenne** la taille de ces derniers était inférieure à celle de leurs pères. De même, les pères de petite taille avaient des fils de petite taille mais **en moyenne** la taille des fils était plus élevée que celle des pères.

Les caractéristiques moyennes de la deuxième génération ont donc tendance à se rapprocher de la moyenne de la population plutôt que de la moyenne de leurs parents. C'est dans ce sens que Galton parle de "régression", plus exactement de "régression" vers la moyenne. Il découvrit ce phénomène en 1875, introduisit l'index de corrélation en 1888 et fut l'un des premiers à utiliser les méthodes de questionnaire et d'échantillonnage dans le cadre de ses recherches en météorologie, anthropométrie et physique anthropologique. Malgré des faiblesses en mathématiques, les idées de Galton ont fortement influencé le développement de la statistique, notamment par sa démonstration qu'une loi composée d'un mélange de lois normales est elle-même normale.

L'analyse de régression linéaire simple permet de connaître la relation linéaire qui existe entre deux variables en estimant une fonction, appelée **équation de régression.**

L'estimation de cette équation de régression se fait à partir du **modèle de régression linéaire simple** suivant :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \boldsymbol{\varepsilon}$$

où Y est la **variable dépendante**, X la **variable indépendante**, $\boldsymbol{\varepsilon}$ un terme d'**erreur** aléatoire non observable et β_0, β_1 les **paramètres à estimer**.

Avec un ensemble de n observations $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$, le modèle s'écrit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Le problème consiste à estimer les paramètres β_0 et β_1, en trouvant les valeurs $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ qui minimisent la distance entre Y_i et $(\beta_0 + \beta_1 X_i)$. Ainsi :

$$\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$$

doit être petit pour tout i. Pour cela, il existe plusieurs critères d'estimation, comme par exemple :

$$(a) \min_{\beta_0,\beta_1} \max_i | \varepsilon_i |$$
$$(b) \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} | \varepsilon_i |$$
$$(c) \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

La méthode d'estimation la plus fréquemment utilisée est celle basée sur le critère (c). On l'appelle méthode des moindres carrés puisqu'elle consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs.

L'estimation de β_0 et β_1 équivaut donc à résoudre un problème d'optimisation classique sans contrainte en minimisant la fonction de deux variables :

$$f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

En annulant les premières dérivées partielles, on obtient le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0 \quad (3.8)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0 \quad (3.9)$$

En développant la somme des équations (3.8) et (3.9) et en les divisant par -2, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad (3.10)$$
$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \quad (3.11)$$

On peut alors en déduire les valeurs estimées de β_0 et β_1, notées $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ représentent les moyennes empiriques.

En opérant une substitution dans l'équation (3.11), on obtient :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

Nous pouvons alors écrire l'équation de régression (droite de régression) :

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

ou encore :

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

où $\hat{Y}_i$ est la valeur estimée pour un X_i donné lorsque $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont déterminés.

Exemple 3.8 ***Application économique.*** *Le directeur d'une agence de location de voitures s'interroge sur les frais d'entretien par année (Y) en fonction du nombre de kilomètres parcourus (X) par ses voitures.*

Il a récolté les données suivantes sur les 20 voitures qu'il possède.

Observation	X	Y
1	5 229	530
2	7 489	686
3	12 784	1 547
4	23 792	2 180
5	18 704	2 019
6	9 871	976
7	19 484	2 018
8	30 412	3 299
9	17 017	1 598
10	8 741	951
11	23 219	2 350
12	28 783	3 031
13	37 418	3 773
14	12 972	1 386
15	4 781	512
16	17 412	1 647
17	29 218	3 070
18	36 413	3 576
19	29 287	2920
20	14 536	1 674

Le modèle s'écrit donc :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Ici :

$$\overline{X} = 19378,6 \qquad \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 1\ 930\ 885\ 291$$
$$\overline{Y} = 1987,15$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{193\ 801\ 388}{1\ 930\ 885\ 291} = 0,1004 \\ \text{et } \hat{\beta}_0 &= \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 1987,15 - 0,1004(19\ 378,6) = 41,5386 \end{aligned}$$

D'où l'équation de régression :

$$\hat{Y} = 41,5386 + 0,1004X$$

3.3 Optimisation classique avec contraintes

Dans de nombreuses applications pratiques, les variables d'une fonction donnée sont soumises à certaines conditions ou contraintes. Ces contraintes peuvent être formulées sous forme d'égalités ou d'inégalités.

Par exemple, si un producteur fabrique deux biens, il peut vouloir minimiser le coût total tout en étant obligé de fabriquer une quantité totale minimum spécifiée. De même, une compagnie peut désirer maximiser ses ventes résultant de deux publicités alors qu'elle doit observer la contrainte du budget de publicité. Enfin, le consommateur désirant maximiser la fonction d'utilité provenant de la consommation de certains biens est restreint par son budget.

Dans le cas où les contraintes s'expriment sous forme d'égalités, l'optimisation de la fonction peut être obtenue grâce à la **méthode des multiplicateurs de Lagrange** qui est la plus largement répandue pour trouver les extrema d'une fonction soumise à des contraintes d'égalité. Cette méthode tient son nom du mathématicien franco-italien (1736-1813), à qui l'on doit le fameux *Mécanique céleste* (1788), ouvrage résumant sous une forme rigoureuse toutes les connaissances acquises en matière de mécanique depuis Newton. C'est dans le cadre de deux mémoires importants sur la théorie des équations, publiés en 1770 et 1771, qu'apparaît pour la première fois le résultat connu sous le terme de théorème de Lagrange.

Dans un premier temps, introduisons cette méthode dans le cas simple où la fonction à optimiser (fonction objectif) est une fonction à deux variables $f(x, y)$ soumise à une seule contrainte de la forme $g(x, y) = 0$.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste à construire une fonction auxiliaire $F(x, y, \lambda)$, appelée **Lagrangien**, définie ainsi :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

où λ (appelé multiplicateur de Lagrange) est une inconnue. Il faut ensuite annuler ses premières dérivées partielles (condition nécessaire) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Les points candidats s'obtiennent en résolvant ce système de trois équations à trois inconnues (x, y, λ).

Mentionnons que la troisième équation de ce système $\partial F/\partial\lambda = g(x, y) = 0$ n'est rien d'autre que la contrainte ! Les points candidats satisfont par conséquent cette contrainte.

La solution des trois équations ci-dessus fournit les points candidats de la fonction sous contrainte. Ces points candidats satisfont la contrainte mais il reste à déterminer leur nature ; pour cela, introduisons la **matrice hessienne bordée :**

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

dont le déterminant sera noté $\mid \boldsymbol{H} \mid$.

La condition suffisante pour l'existence d'un extremum est fournie par le résultat 3.5.

Résultat 3.5 *Soit $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ le point en lequel*

$$\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial \lambda = 0$$

Alors, si en ce point

$$\mid \boldsymbol{H} \mid < 0 \Longrightarrow \textit{minimum au point } P.$$

$$\mid \boldsymbol{H} \mid > 0 \Longrightarrow \textit{maximum au point } P.$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut se généraliser à l'optimisation d'une fonction à n variables $f(x_1, \ldots, x_n)$ soumise à k contraintes :

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \;\; j = 1, \ldots, k \;\text{ où }\; 1 \leq k \leq n$$

Dans ce cas, le Lagrangien s'écrit :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

L'annulation des premières dérivées partielles fournit un système de $n + k$ équations à $n + k$ inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} &= g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0
\end{aligned}$$

Les conditions du deuxième ordre permettant de déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum reposent sur le calcul des mineurs de la matrice hessienne bordée suivante :

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{array}\right)$$

Notons le mineur principal qui contient $\partial^2 F/\partial x_1^2$ comme dernier élément de la diagonale principale par $\mid \boldsymbol{H}_1 \mid$. $\mid \boldsymbol{H}_2 \mid$ correspond au mineur principal qui contient $\partial^2 F/\partial x_2^2$ comme dernier élément de la diagonale principale et ainsi de suite. La condition suffisante pour l'existence d'un minimum ou d'un maximum dépend des signes des mineurs principaux $\mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid$, $\mid \boldsymbol{H}_{k+2} \mid$, $\ldots, \mid \boldsymbol{H}_n \mid = \mid \boldsymbol{H} \mid$.

Mentionnons qu'il existe au moins une contrainte ($k \geq 1$) et que, par conséquent, $\mid \boldsymbol{H}_1 \mid$ n'intervient jamais dans les calculs. La condition suffisante pour l'existence d'un extremum est donnée dans le résultat 3.6.

Résultat 3.6 *La fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ soumise aux k contraintes :*

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \;\; j = 1, \ldots, k$$

admet :

- *un maximum au point candidat si les mineurs principaux $\mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid$, $\mid \boldsymbol{H}_{k+2} \mid, \ldots, \mid \boldsymbol{H}_n \mid$ sont de signe alterné, le signe de $\mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid$ étant celui de $(-1)^{k+1}$,*

- *un minimum si les mineurs principaux* $\mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid, \mid \boldsymbol{H}_{k+2} \mid, \ldots, \mid \boldsymbol{H}_n \mid$ *sont de même signe, celui de* $(-1)^k$.

Exemple 3.9 *Trouver les extrema de la fonction objectif :*

$$f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

sous la contrainte :

$$x + 2y = 24$$

La contrainte s'écrit $g(x, y) = x + 2y - 24 = 0$.
Le Lagrangien est donné par :

$$F(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

L'annulation des premières dérivées partielles fournit un système de trois équations à trois inconnues qu'il s'agit de résoudre.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - y + \lambda = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12y - x + 2\lambda = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y - 24 = 0 \tag{3.14}$$

En éliminant λ des équations (3.12) et (3.13), on obtient $2y = 3x$ que l'on substitue dans (3.14).

$$x + 3x - 24 = 0$$
$$4x = 24$$

On obtient $x_0 = 6$.
Comme $x + 2y = 24$, on trouve $y_0 = 9$.
Pour déterminer si le point candidat $x_0 = 6$ et $y_0 = 9$ est un extremum, il faut calculer les dérivées partielles du deuxième ordre.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -1$$

Les dérivées partielles de la contrainte $g(x, y) = x + 2y - 24$ sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = 2$$

La matrice hessienne bordée est donc

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Puisqu'il s'agit d'une fonction à deux variables soumise à une contrainte, on utilise le résultat 3.5.

Comme $| \boldsymbol{H} | = -56 < 0$, la fonction objectif sous la contrainte $x+2y = 24$ possède un minimum en $x_0 = 6$ et $y_0 = 9$.

Nous avons donc trouvé la solution qui minimise la fonction objectif tout en respectant la contrainte. Remarquons que cette même fonction, si elle n'est pas soumise à la contrainte $x + 2y = 24$, ne possède pas un minimum au même point ! Le lecteur peut vérifier que sans la contrainte, cette fonction possède un minimum en $x_0 = y_0 = 0$.

Exemple 3.10 *Une entreprise fabrique trois types de machines : x_1, x_2 et x_3. La fonction de coût conjointe $C(x_1, x_2, x_3)$ est :*

$$C(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 30x_2 - 30x_3$$

Combien de machines de chaque type l'entreprise doit-elle fabriquer pour minimiser son coût s'il lui faut un total de 100 machines ?

Il s'agit ici de minimiser la fonction de coût conjointe sous la contrainte :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Ainsi $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 100$.

La fonction de Lagrange $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= C(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3) \\ &= 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 30x_2 - 30x_3 \\ &+\lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 100) \end{aligned}$$

Annulons les premières dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 8x_1 - 2x_2 + \lambda = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 + x_3 - 30 + \lambda = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2 - 30 + \lambda = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 100 = 0 \tag{3.18}$$

Tirons λ de la première équation : $\lambda = 2x_2 - 8x_1$. En substituant λ dans les équations (3.16) et (3.17), on obtient avec l'équation (3.18) un système de trois équations à trois inconnues :

$$-10x_1 + 6x_2 + x_3 = 30 \tag{3.19}$$

$$-8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 30 \tag{3.20}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100 \tag{3.21}$$

De (3.21), on tire $x_1 = 100 - x_2 - x_3$ que l'on remplace dans (3.19) et (3.20) pour obtenir :

$$16x_2 + 11x_3 = 1030 \tag{3.22}$$

$$11x_2 + 10x_3 = 830 \tag{3.23}$$

De (3.23), on tire $x_3 = \dfrac{830 - 11x_2}{10}$ que l'on substitue dans (3.22).

$$16x_2 + \frac{11}{10}(830 - 11x_2) = 1030$$

$$\begin{aligned} 160x_2 - 121x_2 &= 1170 \\ 39x_2 &= 1170 \\ x_2 &= 30 \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat dans (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} 330 + 10x_3 &= 830 \\ 10x_3 &= 500 \\ x_3 &= 50 \end{aligned}$$

Finalement, en se basant sur (3.21), on en conclut que $x_1 = 100 - 30 - 50 = 20$.

Ainsi, le point candidat est $x_1 = 20, x_2 = 30$ et $x_3 = 50$. Vérifions à présent qu'il s'agit bien d'un minimum. Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial x_3} &= 1 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= 8 & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= 4 & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} &= -2 & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} &= 1 \end{aligned}$$

La matrice hessienne bordée est par conséquent donnée par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mid \boldsymbol{H}_2 \mid = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 \text{ et } \mid \boldsymbol{H}_3 \mid = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -39$$

Comme dans cet exemple il n'y a qu'une contrainte, $(k = 1)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid &= \mid \boldsymbol{H}_2 \mid = -16 \\ \mid \boldsymbol{H}_{k+2} \mid &= \mid \boldsymbol{H}_n \mid = \mid \boldsymbol{H}_3 \mid = -39 \\ (-1)^k &= (-1)^1 = -1 \end{aligned}$$

Selon le résultat 3.6, les mineurs $| \boldsymbol{H}_2 |$ et $| \boldsymbol{H}_3 |$ sont du même signe que $(-1)^k$; le point $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ et $x_3 = 50$ est donc un minimum.

Exemple 3.11 *Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts de production respectifs pour les deux usines sont :*

$$\begin{aligned} C_1 &= 200 + 6q_1 + 0,03q_1^2 \\ C_2 &= 150 + 10q_2 + 0,02q_2^2 \end{aligned}$$

où q_1 et q_2 représentent le nombre d'appareils produits dans chaque usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise de Zürich. Les frais de transport par appareil sont de Fr. 4.- pour les livraisons à partir de la première usine et de Fr. 2.- pour les livraisons à partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productrice.

Calculons le nombre d'appareils que la firme doit produire dans chaque usine afin de minimiser le coût total (coût de transport y compris).

Le coût total $C(q_1, q_2)$ est égal à :

$$\begin{aligned} C(q_1, q_2) &= (C_1 + 4q_1) + (C_2 + 2q_2) \\ &= 0,03q_1^2 + 0,02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 \end{aligned}$$

Comme la firme doit livrer 100 appareils au total, il faut tenir compte de la contrainte $q_1 + q_2 = 100$.

Nous allons résoudre ce problème avec l'outil **Solveur** d'**Excel**, présenté au chapitre 2. La première étape consiste à nommer les cellules contenant les variables. En choisissant l'option **Créer** dans le menu **Insertion** puis **Nom**. Les valeurs données n'ont pour le moment aucune importance, mais les cellules ne peuvent pas être vides lorsque l'on utilise le Solveur.

Figure 3.7 : Attribution des noms q1 et q2 aux cellules A2 et B2

Nous allons maintenant saisir la fonction à minimiser, ainsi que la contrainte dans les cellules A4 et A5.

	A	B	C	D
1	q1	q2		
2	1	1		
3				
4	=0.03*A2^2+0.02*B2^2+10*A2+12*B2+350			
5	=A2+B2			
6				
7				

Figure 3.8 : Saisie des fonctions

Notons que les fonctions n'apparaîtront pas à l'écran. Excel calcule les résultats avec les valeurs actuelles des variables.

Sélectionner la cellule contenant la fonction à minimiser et lancer le **Solveur** du menu **Outil**. La cellule cible est la fonction à minimiser, les cellules variables sont les cellules A2 et B2 et la contrainte doit être égale à 100. De plus, les deux variables doivent être positives.

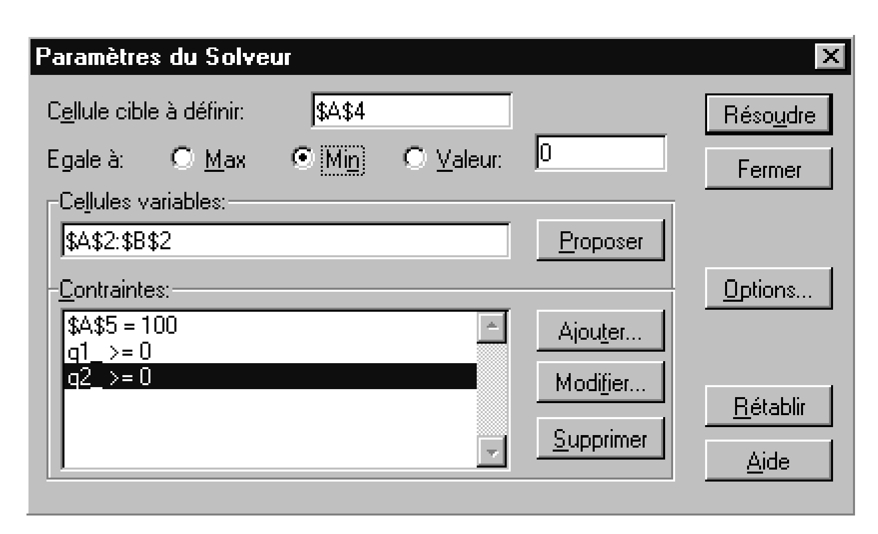


Figure 3.9 : Le **Solveur** est prêt à résoudre ce problème

Cliquer sur Résoudre et après quelques secondes, le résultat s'affiche :

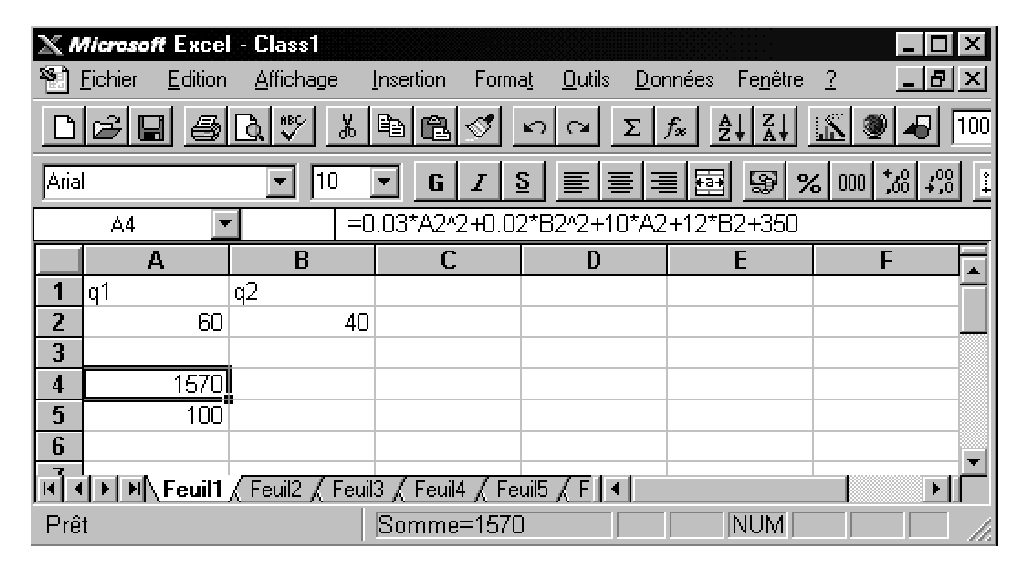


Figure 3.10 : Solution de la minimisation sous contrainte

En plus des valeurs de q_1 et q_2 qui minimisent le coût sous la contrainte de la quantité totale produite, Excel affiche le coût total et le nombre de pièces produites.

Le **Solveur**, avant d'afficher le résultat, propose différents rapports. Dans le cas d'une optimisation classique sous contrainte, en sélectionnant rapport de **sensibilité**, Excel crée une feuille de calcul sur laquelle on lit, entre autres, la valeur du multiplicateur de Lagrange.

Remarque 3.1 *La méthode des multiplicateurs de Lagrange ne peut pas être utilisée dans tous les cas. Notamment lorsque le problème d'optimisation possède des contraintes de non-négativité ou lorsque la fonction n'est pas dérivable, cette méthode n'est pas adaptée.*

Voyons à l'aide de deux exemples les difficultés rencontrées dans de telles situations.

Microsoft Excel 7.0a Rapport de la sensibilité
Feuille: [optimisation.xls]Feuil1
Date du rapport: 11.5.98 14:50

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur finale	Gradient réduit
A2	q1_	60	0
B2	q2_	40	0

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur finale	Multiplicateur de Lagrange
A5	q1	100	13.6000021

Rapport de la sensibilité 1 Rapport des

Figure 3.11 : Rapport de sensibilité

Exemple 3.12 *Considérons le problème d'optimisation suivant :*
Minimiser $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ *sous les contraintes suivantes :*

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Les trois dernières contraintes sont appelées contraintes de non-négativité. Il faut les transformer en contraintes d'égalité puisque la méthode des multiplicateurs de Lagrange est basée sur ce type de contraintes. Cette transformation peut se faire en soustrayant respectivement à x_1, x_2 et x_3 le carré des variables u_1, u_2 et u_3. Comme un carré est toujours positif ou nul, l'égalité est respectée si et seulement si x_1, x_2 et x_3 sont non-négatifs ; les trois contraintes de non-négativité sont donc équivalentes à :

$$\begin{aligned}
x_1 - u_1^2 &= 0\\
x_2 - u_2^2 &= 0\\
x_3 - u_3^2 &= 0
\end{aligned}$$

La fonction de Lagrange correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) \quad &= x_1 + x_2 + x_3 + \lambda_1(x_1 - u_1^2) + \lambda_2(x_2 - u_2^2) \\ &+\lambda_3(x_3 - u_3^2) + \lambda_4(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12). \end{aligned}$$

En annulant les dérivées partielles par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 et u_3, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 1 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = -2\lambda_1 u_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 u_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = -2\lambda_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 u_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} = -2\lambda_3 u_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 u_3 = 0$$

Comme $x_j = u_j^2$ pour $j = 1, 2, 3$, les trois dernières équations indiquent qu'il existe pour chacune d'elles deux possibilités : soit $\lambda_j = 0$, soit $x_j = 0$, pour $j = 1, 2, 3$. Il y a donc au total $2^3 = 8$ cas différents.

Dans le cas général où il y a n variables, il faudra considérer 2^n cas. Dans ce type de situation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'avère inutilisable, car il est impossible, dans la pratique, de considérer tous les 2^n cas possibles lorsque n est grand.

Exemple 3.13 *Dans le cas du modèle de régression linéaire simple :*

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \boldsymbol{\varepsilon}$$

on a vu que β_0 et β_1 pouvaient être estimés en minimisant la somme des écarts au carré, à savoir :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Mais on peut également trouver β_0 et β_1 en minimisant la moyenne absolue des écarts, c'est-à-dire :

$$\min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mid Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \mid$$

et ceci sous la contrainte :

$$Y_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

pour une paire donnée (X_0, Y_0).

Or ici, on ne peut employer ni la méthode des multiplicateurs de Lagrange ni une autre méthode classique, car on sait que la fonction "valeur absolue" n'est pas différentiable en son point minimum où elle forme un angle, comme l'indique la figure 3.12.

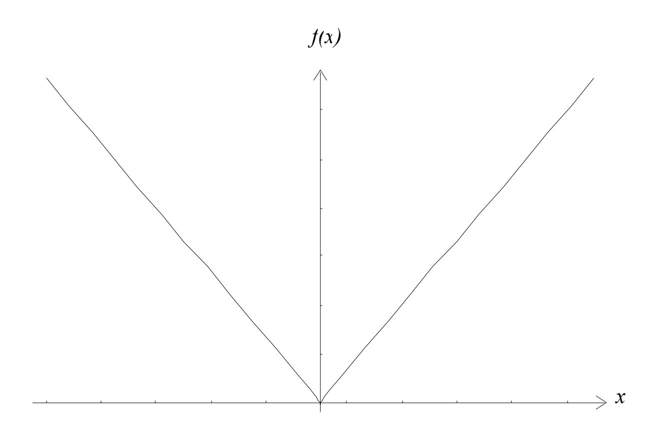


Figure 3.12 : $f(x) = \mid x \mid$ n'est pas différentiable en $x = 0$

Nous venons donc de voir que la méthode des multiplicateurs de Lagrange a des lacunes lorsque l'on rencontre des contraintes de non-négativité. Or, ces contraintes sont très importantes en économie. Par conséquent, il nous faut aborder d'autres méthodes lorsque les contraintes se présentent sous forme d'égalité ou d'inégalité.

Ce genre de méthodes peut être classé dans la programmation mathématique, comme mentionné dans le chapitre 1. Nous allons toutefois limiter notre étude à des problèmes spécifiques dans lesquels la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Ce type de problèmes sera traité sous le nom de programmation linéaire.

3.4 Exercices

1. Une fabrique utilise deux facteurs de production x et y pour produire un certain nombre d'unités d'un bien z.

   Le prix d'une unité du facteur x est de 3 CHF et celui d'une unité du facteur y est 2 CHF. La fonction de coût de production est donc :

   $$c = 3x + 2y$$

   Si cette fabrique doit produire 300 unités du bien z et que la fonction de production est donnée par $z = \sqrt[4]{2}(15)x^{3/4}y^{1/4}$ (contrainte!), combien devra-t-elle acheter d'unités de x et de y pour minimiser le coût de production ?

2. Un investisseur décide d'acheter trois types d'actions pour un montant compressif de 400 CHF. Soit X_1, X_2 et X_3 le montant consacré à chaque type d'action, ainsi $X_1 + X_2 + X_3 = 400$. Le taux de rendement pour chaque action est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique et la variance sont données par le tableau suivant :

type d'action	rendement moyen	variance
1	0,20	1/5
2	0,15	1/10
3	0,10	1/25

   On appelle rendement moyen espéré du placement, l'expression :

   $$\overline{R} = 0.20X_1 + 0.15X_2 + 0.10X_3$$

   On appelle risque du placement, l'expression suivante (c'est-à-dire la variance) :

$$V = \frac{1}{5}X_1^2 + \frac{1}{10}X_2^2 + \frac{1}{25}X_3^2$$

(a) Trouver X_1, X_2 et X_3 tels qu'ils minimisent le risque. À quel rendement moyen espéré correspond cette répartition des achats ?

(b) Trouver X_1, X_2 et X_3 tels qu'ils minimisent le risque sous la contrainte additionnelle que le rendement moyen espéré $\overline{R} = 60$. Par rapport à la situation sous (a), le risque est-il plus grand ou plus faible ?

3. Une firme produit un certain bien qu'elle vend sur le marché au prix unitaire de 8 CHF. La quantité produite (et vendue) est donnée par:

$$Q = 8K^{3/8}L^{1/8}$$

où K représente les unités de facteur capital employées et L les unités de facteur travail employées. Le revenu de la firme s'élève donc à $8Q = 64K^{3/8}L^{1/8}$. Le coût de production de cette firme est donné par $C = 12K + 4L$.

(a) Trouver les quantités de K et L que la firme doit employer afin de maximiser son bénéfice.

(b) La firme constate que la politique de maximisation du bénéfice ne lui assure pas une part de marché suffisante. Elle décide en conséquence d'adopter la politique de maximisation de la quantité vendue sous réserve d'un bénéfice minimal égal à 48 CHF.

i. Formuler explicitement le problème de maximisation sous contrainte.

ii. Montrer que dans la solution optimale, la combinaison optimale des facteurs (c'est-à-dire leurs proportions) reste la même que dans le problème de maximisation du bénéfice.

iii. Donner la solution complète pour K, L et Q.

4. La fonction de production d'une firme est donnée par

$$Q = 4K^{1/4}L^{3/4}$$

où K et L sont les deux facteurs de production et Q la quantité produite. La firme achète les deux facteurs sur le marché : le prix unitaire de L est de 3 CHF et, en raison d'une pénurie, le prix unitaire de K est une fonction croissante de K suivant la formule :

$$p_k = 2 + 0,1K$$

Sachant que la somme consacrée à l'achat des deux facteurs de production est de 150 CHF, trouver les valeurs de K et L qui maximisent la production. Quel est le prix unitaire de K ?

5. Maximiser $z = -x \ln x - y \ln y$ sous la contrainte $x + y = 1$.

6. Une firme monopolistique produit un certain bien. Le coût total de sa production est représenté par la fonction :

$$C = 2I^2 + 5q^2 - 20q + 400$$

où q représente les unités produites et I un indice de qualité du produit (par exemple le degré de raffinage du produit).

Le prix que la firme peut exiger sur le marché est fonction de l'indice de qualité :

$$p = 100 - 3q + 4I$$

(a) Calculer la recette totale de la firme.

(b) Trouver q et I tels qu'ils maximisent le bénéfice de la firme.

(c) Vérifier les conditions de deuxième ordre.

7. Vous partez en vol charter pour un voyage aux États-Unis. Dans votre valise vous êtes autorisé à emporter 24 kg. Vos affaires de toilette pèsent 4 kg et vous voulez utiliser les 20 kg qui restent de façon optimale. Vous

aimeriez emporter trois sortes de biens : blue jeans notés X, T-shirts notés Y et pull-overs notés Z. Les poids unitaires respectifs sont (en kg) :

$$p_X = 2 \qquad p_Y = 0,5 \qquad p_Z = 1$$

L'utilité que ces vêtements vous procurent pendant votre voyage est mesurée par la fonction :

$$U = X^2YZ$$

(a) Choisissez X, Y et Z de façon à maximiser l'utilité.

(b) Ayant choisi votre assortiment optimal, vous vous rendez compte que vous ne pouvez pas fermer votre valise. Le volume total disponible (après y avoir rangé vos affaires de toilette) est de 40dm^3. Le volume unitaire respectif des trois vêtements (en dm^3) est :

$$V_X = 4 \qquad V_Y = 2/3 \qquad V_Z = 3$$

Trouvez la combinaison optimale sous la double contrainte du poids et du volume. Vérifier alors la condition de deuxième ordre.

8. Trouver l'extremum de :

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + 5z^2$$

sous la contrainte :

$$x + y + 2z = 10$$

9. Une entreprise a la fonction de production suivante :

$$Q = 8K^{1/2}L^{1/4}$$

où Q est la production, K le capital et L le travail. Le prix du capital est $p_K = 4$, le taux de salaire $p_L = 2$ et l'entreprise désire produire $Q = 64$. Trouver la combinaison des facteurs K et L donnant au moindre coût la production requise.

10. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y) = \ln \mid x \mid + \ln \mid y \mid$, x et y étant liés par la contrainte $x^2 + y^2 = 9$.

11. Une entreprise fabrique deux types de machines : x et y. La fonction de coût conjointe est donnée par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x - 12y + 151$$

Trouver le nombre de machines de chaque type que l'entreprise doit fabriquer pour minimiser son coût.

À l'aide des conditions du second ordre, montrer qu'il s'agit bien d'un minimum.

12. Un consommateur dépense 24 CHF pour l'achat de deux biens : x et y. Les prix de x et de y sont respectivement de 1 CHF et de 2 CHF. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par $U = 5x^2 + 6y^2 - xy$.

Combien d'unités de chaque bien doit-il consommer pour maximiser son utilité ?

Chapitre 4

Programmation linéaire

4.1 Introduction

À partir de la fin de la Seconde Guerre mondiale, de nouvelles méthodes permirent de résoudre des problèmes complexes là où les méthodes classiques échouaient. Ces méthodes furent connues sous le nom de *programmation linéaire,* développées principalement par George B. Dantzig (né le 8 novembre 1914), mathématicien américain et créateur de la méthode du Simplexe, et L. Kantorovich (1912-1986).

Danzig, outre la programmation linéaire, étudia entre autres la programmation mathématique, la prise de décision et les modèles de planification à large échelle. L'impact de son œuvre fut considérable en gestion et en économie et ses méthodes restent totalement d'actualité.

Ce chapitre permet de se familiariser avec les notions relatives à la programmation linéaire. Plusieurs exemples illustrent les différents domaines d'application de la programmation linéaire, notamment en économie.

Les problèmes exposés dans ce chapitre seront résolus graphiquement. Les techniques de résolution numériques seront abordées au chapitre suivant.

4.2 Problèmes de programmation mathématique

De manière générale, la résolution de problèmes de programmation mathématique vise à déterminer l'allocation optimale (c'est-à-dire la meilleure combi-

naison possible) de ressources limitées pour atteindre certains objectifs. Les allocations doivent minimiser ou maximiser une fonction dite objectif. En économie, ces fonctions sont par exemple le profit ou le coût.

Ces problèmes, traités par la programmation mathématique, se distinguent des problèmes d'optimisation classique par le fait que leurs solutions sont d'ordre numérique. Celles-ci sont obtenues par une technique numérique itérative, alors que les solutions à un problème classique sont en général données sous forme de formules fermées.

La forme générale d'un problème de programmation mathématique est la suivante :

$$\text{Optimiser} \quad z = \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.1}$$

$$\text{sous contraintes} \quad h_i(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i \tag{4.2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

où les fonctions f et h_i sont des fonctions numériques à n variables. La fonction f de (4.1) est la fonction objectif à optimiser, tandis que les équations ou inéquations de (4.2) sont les contraintes.

Selon la nature des fonctions f et h_i, on peut être confronté à plusieurs types de problèmes de programmation mathématique.

Lorsque les fonctions f et h_i, $i = 1, \ldots, m$ sont linéaires, il s'agit d'un problème de programmation linéaire. Si de plus, on impose que les variables ne peuvent prendre que des valeurs entières, on parle de programmation linéaire entière. Les problèmes dans lesquels la fonction f ou h_i sont non-linéaires font partie de la programmation non-linéaire. Un cas particulier est la programmation quadratique relative aux problèmes pour lesquels la fonction f est quadratique et les fonctions h_i linéaires. Par la suite, nous étudierons essentiellement les problèmes de programmation linéaire.

4.3 Problèmes de programmation linéaire

La programmation linéaire est définie comme étant un cas particulier de la programmation mathématique pour laquelle (4.1) et (4.2) sont linéaires. De plus, les variables sont supposées être non-négatives. Un problème de

programmation linéaire revient donc à :

$$\begin{array}{rl} \text{Optimiser} & z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ \text{sous contraintes} & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i \\ & i = 1, \ldots, m \end{array} \quad (4.3)$$

et

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \ldots, n \quad (4.4)$$

où a_{ij}, b_i et c_j sont des constantes connues.

Les contraintes $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ sont appelées contraintes de non-négativité.

Voyons à présent quelques exemples simples de programmation linéaire que l'on peut rencontrer dans différents contextes réels. Ces exemples ont pour but de formuler mathématiquement un problème donné. La résolution se fera ici graphiquement.

Exemple 4.1 *Il s'agit d'un exemple de production dans lequel une entreprise fabrique des chaises et des tables à l'aide de deux machines A et B. Chaque produit passe obligatoirement par les deux machines. Pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A et 1 heure de machine B. Pour produire une table, il faut 1 heure de machine A et 2 heures de machine B. L'entreprise réalise un bénéfice de Fr. 3.- sur chaque chaise et de Fr. 4.- sur chaque table. Les deux machines A et B sont disponibles 12 heures par jour au maximum.*

Le problème consiste à savoir combien de chaises et de tables il faut fabriquer pour maximiser le bénéfice. Le tableau suivant montre :

1. le nombre d'heures nécessaires pour produire chaque table et chaque chaise par machine ;

2. le nombre total des heures disponibles ;

3. le profit pour chaque unité de chaise et de table produite.

Machine	Produit		Disponibilité
	Chaise	Table	
A	2	1	12
B	1	2	12
Bénéfice par unité	3	4	

Il s'agit à présent de formuler mathématiquement le problème.

Notons respectivement par x_1 et x_2 le nombre de chaises et de tables qui doit être produit par jour.

Le bénéfice pour une chaise étant de Fr. 3.- et celui pour une table de Fr. 4.-, le bénéfice journalier est donc donné par la fonction objectif :

$$z = 3x_1 + 4x_2 \tag{4.5}$$

qu'il s'agit de maximiser. Il faut dès lors formuler les contraintes. Puisque le temps où les machines peuvent fonctionner est limité, on ne peut pas accroître la production indéfiniment. Les machines A et B ne peuvent pas fonctionner plus de 12 heures par jour. On sait que pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A alors que pour une table il n'en faut qu'une. La contrainte concernant la machine A est donc :

$$2x_1 + 1x_2 \leq 12 \tag{4.6}$$

De même, une chaise requiert 1 heure de machine B, tandis qu'une table en demande 2. La contrainte concernant la machine B, avec la même durée maximale de 12 heures par jour, est donnée par :

$$x_1 + 2x_2 \leq 12 \tag{4.7}$$

De plus, comme on ne peut pas produire de quantités négatives, il faut ajouter encore deux contraintes de non-négativité :

$$x_1 \geq 0 \tag{4.8}$$

et

$$x_2 \geq 0 \tag{4.9}$$

Le problème consiste donc à trouver les valeurs des variables x_1 et x_2 qui maximisent le bénéfice journalier (4.5) tout en satisfaisant les contraintes (4.6) à (4.9).

En résumé, le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- **Représentation graphique du problème de programmation linéaire**

  L'exemple de production décrit ci-dessus peut être représenté graphiquement puisqu'il ne contient que deux variables. Avant de rechercher la solution du problème, représentons sur la figure 4.1 la région des points $(x_1; x_2)$ qui satisfont les quatre contraintes simultanément. Les deux contraintes de non-négativité $x_1, x_2 \geq 0$ indiquent que cette région se trouve dans le premier quadrant. En ce qui concerne les deux autres inégalités, on étudie les équations de droite :

$$2x_1 + 1x_2 = 12$$

  et

$$x_1 + 2x_2 = 12$$

  La première est une droite passant par les points (6 ;0) et (0 ;12), tandis que la deuxième passe par (12 ;0) et (0 ;6). L'intersection de ces deux droites est le point (4 ;4). La région des points satisfaisant les quatre inégalités est la région hachurée sur la figure 4.1. Elle a pour sommets les points (0 ;0), (0 ;6), (4 ;4) et (6 ;0).

  Pour résoudre le problème de programmation linéaire, nous devons trouver le ou les points appartenant à ce polyèdre convexe et maximisant la fonction objectif : $z = 3x_1 + 4x_2$. Pour une valeur donnée de z, il s'agit d'une droite. En attribuant différentes valeurs à z on obtient autant de droites parallèles (quelle que soit la valeur de z, la pente reste inchangée et vaut $-3/4$).

  Puisque le but est de maximiser la fonction objectif, la recherche de la solution optimale se fait en translatant la droite $z = 3x_1 + 4x_2$ de manière à ce que l'ordonnée à l'origine soit la plus grande. De plus,

pour satisfaire les contraintes, l'intersection de cette droite avec la région hachurée doit être non vide.
Sur la figure 4.1, la fonction objectif est tracée pour trois valeurs de z. La première valeur est $z_1 = 18$. Cette valeur n'est pas optimale puisque l'on peut encore déplacer la fonction objectif en gardant des points communs avec la région hachurée. La deuxième valeur $z_2 = 28$. Il s'agit de la valeur optimale puisque l'ordonnée à l'origine est la plus grande possible tout en gardant un point d'intersection avec la région hachurée. La troisième valeur $z_3 = 38$ ne peut pas être optimale puisqu'il n'y a plus de point en commun entre la droite et la région hachurée.
Ainsi dans cet exemple, la solution optimale se situe à l'intersection des deux droites $2x_1 + x_2 = 12$ et $x_1 + 2x_2 = 12$. Il s'agit d'une solution unique donnée par $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$. Cela signifie que le bénéfice est maximal lorsqu'on produit 4 chaises et 4 tables par jour. Ce bénéfice s'élève à $z = 3(4) + 4(4) = 28$ par jour.
À noter que la solution optimale est l'un des sommets du polyèdre (point extrême). Nous verrons au chapitre 5 que lorsque la solution existe, elle coïncide toujours avec un point extrême du polyèdre (bien que la solution ne soit pas forcément unique).

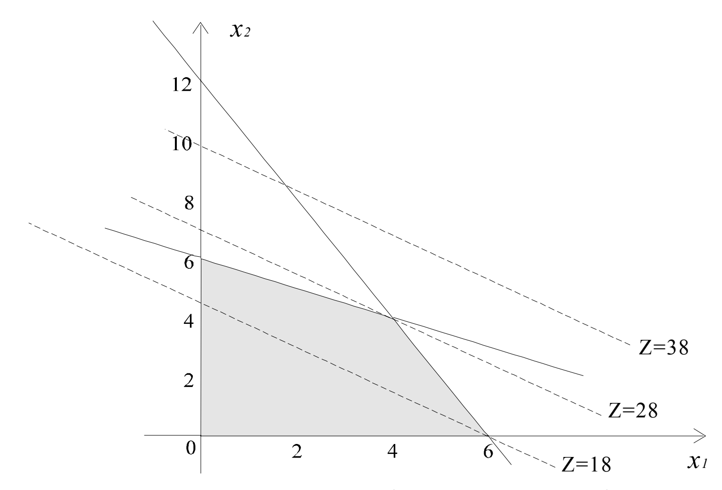


Figure 4.1 : Région réalisable et fonction objectif pour $z_1 = 18$, $z_2 = 28$ et $z_3 = 38$

Exemple 4.2 *Voyons à présent un cas où la fonction objectif doit être minimisée. Une compagnie possède deux mines de charbon A et B. La mine A produit quotidiennement 1 tonne de charbon de qualité supérieure, 1 tonne de*

qualité moyenne et 6 tonnes de qualité inférieure. La mine B produit par jour 2, 4 et 3 tonnes de chacune des trois qualités. La compagnie doit produire au moins 90 tonnes de charbon de qualité supérieure, 120 tonnes de qualité moyenne et 180 tonnes de qualité inférieure.

Sachant que le coût de production journalier est le même dans chaque mine, soit 1 000, quel est le nombre de jours de production dans la mine A et dans la mine B qui minimisent le coût de production de la compagnie ?

Pour traduire ce problème sous la forme d'un programme linéaire, posons x_1 le nombre de jours de travail dans la mine A et x_2 celui dans la mine B. Par jour, la mine A permet de produire 1 tonne de charbon de qualité supérieure tandis que la mine B peut en produire 2 tonnes. Comme la compagnie doit en produire au moins 90 tonnes, la contrainte s'écrit :

$$x_1 + 2x_2 \geq 90$$

De même, pour les deux autres qualités de charbon, on trouve :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\geq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 &\geq 180 \end{aligned}$$

La fonction objectif à minimiser est :

$$z = 1000x_1 + 1000x_2$$

Le problème de programmation linéaire s'écrit donc :

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 1000x_1 + 1000x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ & & x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ & & 6x_1 + 3x_2 \geq 180 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La figure 4.2 indique dans sa partie hachurée l'ensemble des points $(x_1; x_2)$ qui satisfont les contraintes. Il s'agit dans ce cas d'une région non-bornée qui a pour sommets les points :

1. intersection de la droite d'équation $6x_1 + 3x_2 = 180$ avec l'axe x_2 : (0 ;60) ;

2. intersection des droites $6x_1 + 3x_2 = 180$ et $x_1 + 2x_2 = 90$: (10 ;40) ;

3. intersection des droites $x_1 + 2x_2 = 90$ et $x_1 + 4x_2 = 120$: (60 ;15) ;

4. intersection de la droite d'équation $x_1 + 4x_2 = 120$ avec l'axe x_1 : (120 ;0).

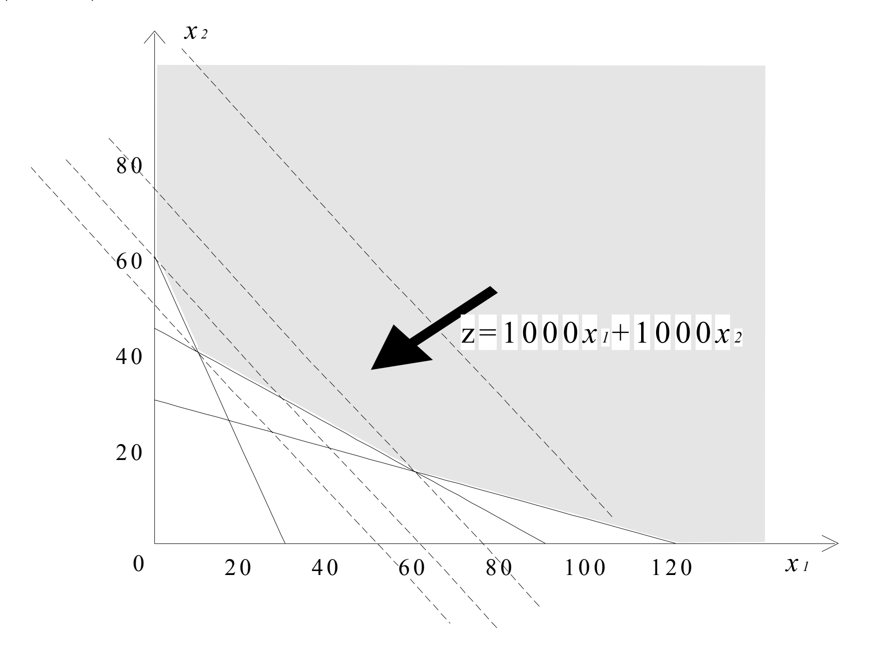


Figure 4.2 : L'ensemble des solutions réalisables n'est pas borné. Le point optimal a pour coordonnées (10 ;40).

La fonction objectif étant donnée par $z = 1000x_1 + 1000x_2$, sa pente vaut -1. En traçant des droites parallèles ayant pour pente -1, on s'aperçoit que celle qui conserve un point en commun avec la région réalisable et dont l'ordonnée à l'origine est la plus petite est la droite passant par le sommet (10 ;40). La solution optimale est donc $x_1 = 10$ et $x_2 = 40$. Le coût de production est donné par :

$$z = 1000(10) + 1000(40) = 50000$$

Exemple 4.3 *Il s'agit ici d'un problème que l'on peut résoudre par la programmation linéaire, c'est-à-dire un problème de transport. Ce type de problème se définit comme suit.*

Connaissant les quantités disponibles de chacune des unités de production, les quantités requises aux points de distribution et le coût de transport d'un bien d'une usine vers un point de vente, il s'agit de déterminer le plan de transport optimal, c'est-à-dire de déterminer les quantités de biens que chaque usine va envoyer vers chacun des points de vente afin que le coût de transport total soit minimum. On suppose qu'il est possible d'expédier des produits de n'importe quelle origine vers n'importe quelle destination.

L'exemple ci-dessous est le cas d'une fabrique de conserves qui expédie des caisses vers ses dépôts. Nous voulons que le plan d'expédition des caisses minimise le coût total de transport des usines aux dépôts. Pour simplifier, supposons qu'il y a deux usines et trois dépôts. L'offre des usines et les demandes des dépôts sont les suivantes (en nombre de caisses) :

usine 1 :	350	dépôt 1 :	200
usine 2 :	450	dépôt 2 :	300
		dépôt 3 :	50

Les coûts de transport de chaque origine vers chaque destination sont donnés dans le tableau ci-dessous (en francs par caisse) :

Usines	Dépôts		
	1	2	3
1	25	17	16
2	24	18	14

Ainsi, le coût pour transporter une caisse de l'usine 1 au dépôt 1 est de 25, le coût pour transporter une caisse de l'usine 2 vers le dépôt 1 est de 24, et ainsi de suite.

Ce problème peut se formuler sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Notons par c_{ij} le coût de transport d'une caisse de l'origine i vers la destination j. Nous avons donc, d'après le tableau précédent :

$$\begin{aligned} c_{11} &= 25 \\ c_{12} &= 17 \\ c_{13} &= 16 \\ c_{21} &= 24 \\ c_{22} &= 18 \\ c_{23} &= 14 \end{aligned}$$

Soit a_i la quantité de caisses disponibles à l'origine i et b_j celle requise à la destination j.

Nous pouvons représenter le problème sous forme d'un diagramme (figure 4.3). Les lignes qui relient les usines aux dépôts peuvent être considérées comme des routes. On y indique leur coût de transport unitaire respectif.

À noter que le nombre de caisses disponibles doit être supérieur ou égal au nombre de caisses requises :

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

Dans le cas contraire, le problème n'a pas de solutions réalisables.

Si x_{ij} représente le nombre de caisses expédiées de l'origine i vers la destination j, le coût total de l'expédition se traduit alors par l'équation :

$$\begin{aligned} z = \textstyle\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij}x_{ij} = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} \\ & c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \end{aligned}$$

$$z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

C'est la fonction objectif à minimiser.

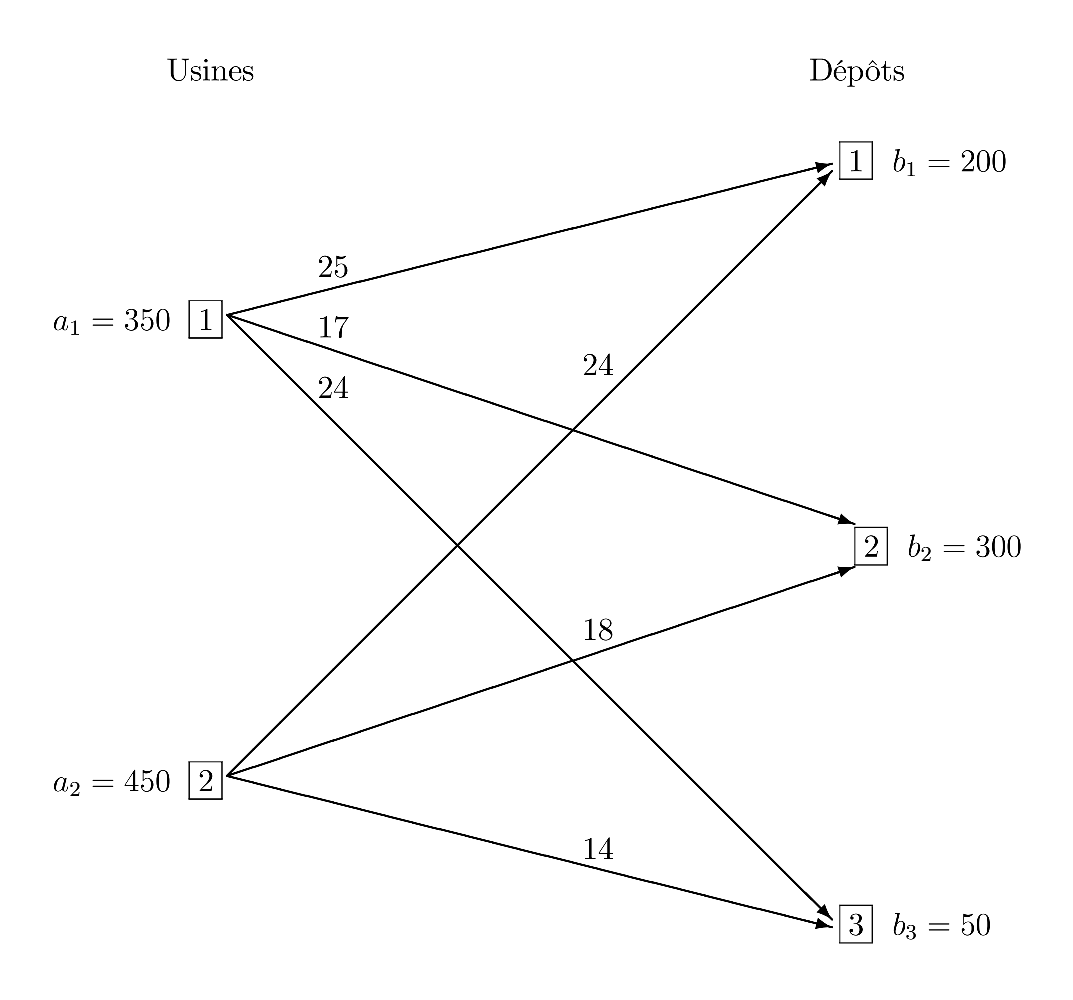


Figure 4.3 : Coût de transport unitaire des usines aux dépôts

Comme il est impossible d'expédier plus de caisses d'une origine donnée qu'il n'y en a de disponibles, nous sommes confrontés aux deux contraintes :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \quad \text{(usine 1)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \quad \text{(usine 2)}$$

De plus, il faut approvisionner chacun des trois dépôts avec la quantité requise, ce qui nous donne trois nouvelles contraintes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} x_{i1} &= x_{11} + x_{21} = 200 \quad \text{(dépôt 1)}\\ \sum_{i=1}^{2} x_{i2} &= x_{12} + x_{22} = 300 \quad \text{(dépôt 2)}\\ \sum_{i=1}^{2} x_{i3} &= x_{13} + x_{23} = 50 \quad \text{(dépôt 3)}\end{aligned}$$

Comme il n'est pas possible d'expédier des quantités négatives, nous avons encore les six contraintes de non-négativité suivantes :

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3$$

Finalement, le programme linéaire à résoudre est :

$$\begin{aligned}\text{Minimiser } z &= 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}\\ \text{sous contraintes} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350\\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450\\ & x_{11} + x_{21} = 200\\ & x_{12} + x_{22} = 300\\ & x_{13} + x_{23} = 50\\ \text{et} \quad & x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2 \ \text{et} \ j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Comme ce problème présente plus de deux variables, nous ne pouvons pas le résoudre géométriquement. En fait, il s'agit d'un cas particulier de programmation linéaire dont les méthodes de résolution feront l'objet du chapitre 7.

4.4 Les différents types de solutions d'un problème de programmation linéaire

Jusqu'ici, les problèmes résolus graphiquement avaient une solution optimale unique, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, trois autres situations peuvent se présenter. Ces différents types de solutions sont expliqués dans les problèmes suivants.

Problème 1 :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes } & \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \text{et } & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comme indiqué sur la figure 4.4, la région réalisable est ici un triangle rectangle dont les sommets sont les points (0 ;0), (0 ;4) et (4 ;0). La fonction objectif est parallèle à l'hypoténuse et la droite qui permet d'attribuer la plus grande valeur à z est le segment de droite reliant les sommets (0 ;4) et (4 ;0). Par conséquent, tous les points de ce segment représentent une solution optimale au problème. Il existe donc une infinité de solutions qui donnent la même valeur de z, à savoir 4. Comme les solutions optimales à ce problème correspondent au segment de droite d'extrémités (0 ;4) et (4 ;0), elles peuvent être décrites par l'ensemble :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

En faisant varier λ entre 0 et 1 on obtient toutes les solutions optimales.

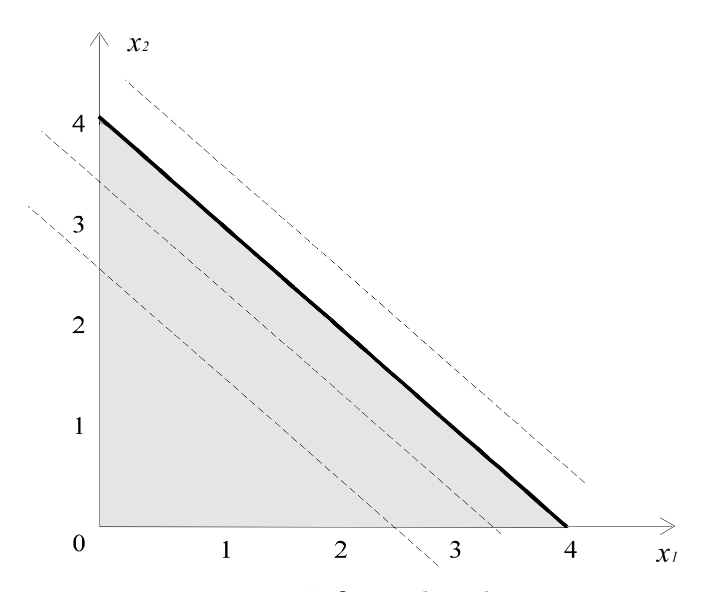


Figure 4.4 : Infinité de solutions

Problème 2 :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 8x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ & & x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dans cet exemple, il suffit d'attribuer à x_1 et x_2 des valeurs suffisamment grandes pour que les contraintes soient satisfaites. La valeur de la fonction objectif peut être augmentée indéfiniment.

Sur la figure 4.5, nous constatons que la région réalisable n'est pas bornée et que la fonction objectif peut être déplacée à l'infini en conservant toujours une intersection non vide avec la région réalisable. Dans ce cas, on dit que le programme linéaire possède une solution optimale infinie.

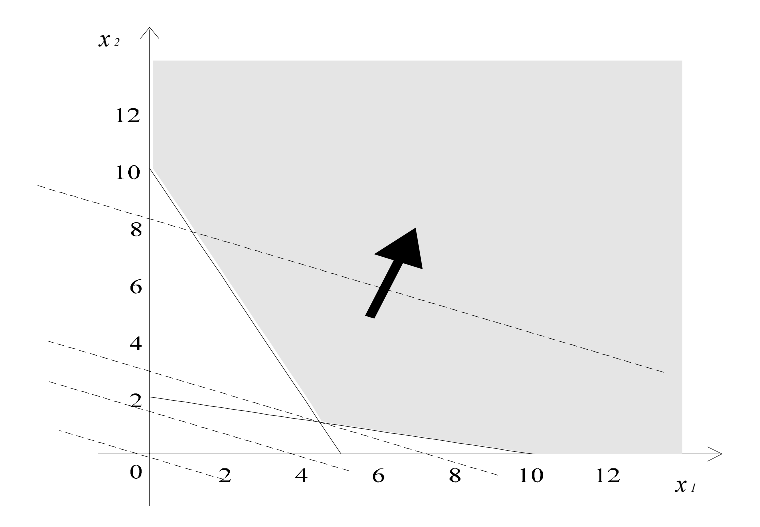


Figure 4.5 : Solution optimale infinie

Il reste un troisième cas possible, celui pour lequel il n'existe pas de solution réalisable. Considérons l'exemple suivant.

Problème 3 :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & & x_1 - x_2 \geq 3 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La figure 4.6 ne présente pas de région réalisable. En effet, il n'existe aucun point qui satisfait simultanément les deux contraintes ainsi que les contraintes de non-négativité. Le programme linéaire ne possède donc aucune solution.

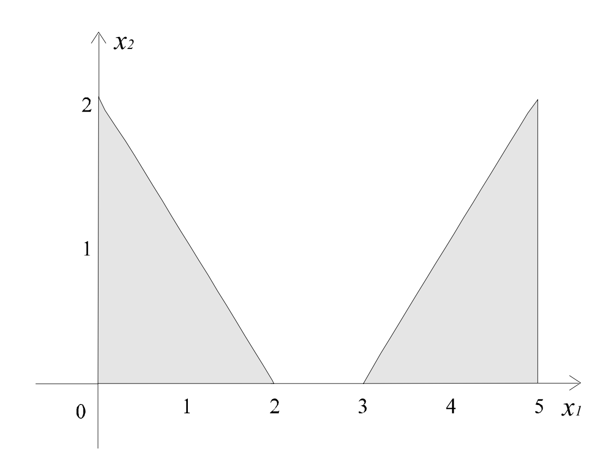


Figure 4.6 : Aucune solution

En résumé, il existe quatre types de solutions à un problème de programmation linéaire :

1. solution optimale unique ;
2. infinité de solutions optimales ;
3. solution optimale infinie ;
4. aucune solution.

Exemple 4.4 *Un épicier possède 450 kg de cacahuètes et 300 kg de noix en stock. Il vend à ses clients trois mélanges différents : le premier, qui ne contient que des cacahuètes, est vendu au prix de 25 CHF le kilo. Le deuxième mélange est composé de deux tiers de cacahuètes et d'un tiers de noix ; il est vendu au prix de 40 CHF le kilo. Le troisième mélange contient un quart de cacahuètes et trois quarts de noix ; son prix est de 50 CHF le kilo. L'épicier aimerait savoir combien de kilos de chaque mélange il doit vendre pour maximiser son chiffre d'affaires.*

En désignant par x_1 la quantité du premier mélange, par x_2 la quantité du deuxième mélange et par x_3 la quantité du troisième mélange, la fonction objectif à maximiser est alors :

$$\text{Maximiser } z = 25x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

Les contraintes sont :

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 450 \tag{4.10}$$

et

$$\frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \leq 300 \tag{4.11}$$

Finalement, nous avons les contraintes de non-négativité :

$$x_1 \geq 0 \tag{4.12}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{4.13}$$
$$\text{et } x_3 \geq 0 \tag{4.14}$$

Comme il s'agit d'un problème à trois variables, il n'est pas possible de le résoudre graphiquement. Nous allons résoudre ce problème en utilisant le **Solveur** d'Excel. La première étape consiste à définir les variables, la fonction à maximiser et les contraintes.

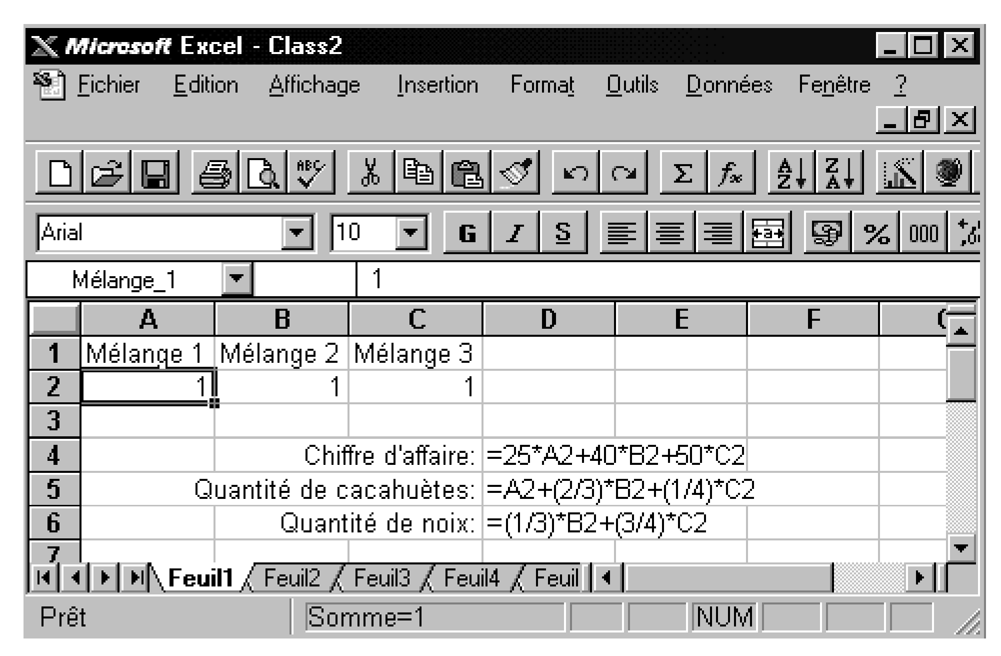


Figure 4.7 : Formulation du problème dans Excel

Nous lançons maintenant le **Solveur** en sélectionnant la cellule D4 qui contient la fonction de calcul du chiffre d'affaires, puis en choisissant **Solveur** dans le menu **Outil**. On peut afficher les résultats intermédiaires dans le menu **Options** du **Solveur**.

Figure 4.8 : Boîte de dialogue du **Solveur**

La solution finale indique un chiffre d'affaires de 31 200 CHF en vendant 0 kg du premier mélange, 630 kg du deuxième et 120 kg du troisième.

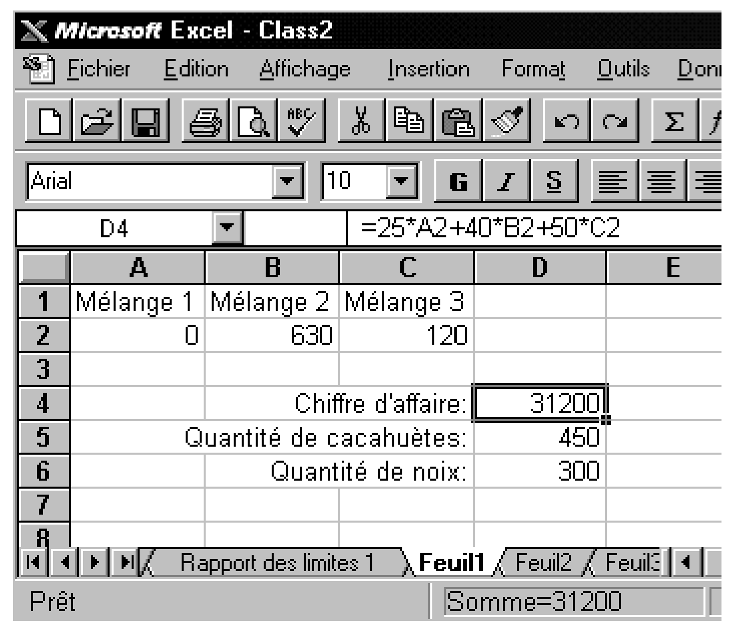


Figure 4.9 : Solution du problème

4.5 Conclusion

Nous allons résumer quelques-unes des propriétés des problèmes de programmation linéaire que nous avons résolus graphiquement.

Nous avons vu que pour un programme linéaire fini, la région des solutions réalisables était convexe, qu'elle possédait des sommets et que des arêtes reliaient les différents sommets.

De plus, nous avons remarqué que lorsque le maximum ou le minimum de z était fini, la solution optimale était toujours un sommet de la région réalisable. La situation était différente quand la fonction objectif pouvait prendre des valeurs infinies. Dans ce cas, naturellement, aucun sommet n'était optimal. Du point de vue de la terminologie, des solutions infinies ne sont pas qualifiées d'optimales. Le terme "solution optimale" est employé quand le minimum ou le maximum de z est fini.

À noter que ces constatations, qui dérivent de simples exemples graphiques, sont vraies pour le cas général de la programmation linéaire. Nous en repar-

lerons d'ailleurs dans le chapitre 5 où nous étudierons la méthode du simplexe. Nous pouvons expliquer cette méthode par une interprétation géométrique très simple. Nous avons établi ci-dessus que s'il existait une solution optimale, il s'agissait d'un point extrême. Or, il n'y a qu'un nombre fini de points extrêmes. La méthode du simplexe consiste à se déplacer étape par étape d'un point extrême donné à un point extrême voisin, jusqu'à ce que l'on arrive à un point extrême optimal. La méthode du simplexe se déplace le long d'une arête de la région réalisable, d'un point extrême à un autre point extrême adjacent. De tous les sommets adjacents, on choisit celui qui donne le plus grand accroissement de la fonction objectif (dans le cas d'une maximisation). À chaque point extrême, la méthode du simplexe nous dit s'il est optimal et si ce n'est pas le cas quel sera le prochain point extrême. Si, à un certain moment, le sommet choisi possède une arête qui conduit à l'infini et si la fonction objectif peut être améliorée en se déplaçant le long de cette arête, la méthode du simplexe nous informe qu'il y a une solution infinie.

Il a été dit plus haut que la méthode du simplexe commençait avec un point extrême donné. Le problème consiste alors à trouver un point extrême initial. Cet aspect sera également traité dans le chapitre suivant.

4.6 Exercices

1. Résoudre graphiquement le programme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Résoudre graphiquement le programme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & & 3x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3. Résoudre graphiquement le programme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & x_1 \leq 3 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode de l'exemple de l'épicerie.

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{sous contraintes} & & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\ & & x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

5. Résoudre en suivant la même méthode que dans l'exercice 4 :

$$\begin{array}{lcl} \text{Maximiser } z & = & 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 \\ \text{sous contraintes} & & \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{9}x_2 + \frac{1}{12}x_3 \leq 300 \\ & & \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 200 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

6. Un tailleur a à sa disposition 10 mètres de coton, 7,5 mètres de laine et 5 mètres de soie. Il a besoin pour un complet d'un mètre de coton, d'un mètre de laine et de 0,25 mètre de soie. Pour une robe, il emploie un mètre de coton, 0,5 mètre de laine et un mètre de soie. Si un complet coûte 160 CHF et une robe 100 CHF, combien doit-il confectionner de complets et de robes pour maximiser son revenu ?

7. Une diététicienne doit préparer un repas composé de deux aliments A et B qui contienne au moins 300 g de protéines et 400 g d'hydrates de carbone. Chaque unité de l'aliment A contient 10 g de protéines et 16 g d'hydrates de carbone et coûte 80 centimes. Chaque unité de l'aliment B contient 12,5 g de protéines et 10 g d'hydrates de carbone et coûte 1,20 CHF. Déterminer le mélange qui coûte le moins cher et qui apporte la quantité requise de protéines et d'hydrates de carbone.

8. Un fermier possède 50 hectares de terre. Il désire planter des pommes de terre dans une partie, du froment dans une autre et laisser, peut-être, la troisième partie en jachère. Le prix de la culture est de 5 CHF par hectare pour la pomme de terre et de 10 CHF par hectare pour le froment. Le fermier travaille 1/2 jour par hectare pour la pomme de terre et 2 jours par hectare pour le froment. Il dispose d'un capital de 550 CHF et peut travailler 80 jours. Le bénéfice est de 20 CHF par hectare pour la pomme de terre et de 60 CHF par hectare pour le froment. Comment doit-il organiser ses plantations pour réaliser un bénéfice maximal ?

Chapitre 5

La méthode du simplexe

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la méthode du simplexe. Cette méthode est l'outil principal de résolution des problèmes de programmation linéaire. Elle consiste à suivre un certain nombre d'étapes avant d'obtenir la solution d'un problème donné. Il s'agit d'une méthode algébrique itérative qui permet de trouver la solution exacte d'un problème de programmation linéaire en un nombre fini d'étapes.

5.2 Formulation du problème

Un problème général de programmation linéaire peut se formuler de la manière suivante : trouver les valeurs de n variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ satisfaisant m inéquations ou équations linéaires (les contraintes) de la forme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

chaque contrainte pouvant avoir un signe d'inégalité différent. De plus, les variables doivent être non-négatives, c'est-à-dire $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (contraintes de non-négativité) et doivent maximiser ou minimiser une forme linéaire (fonction objectif) telle que :

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

En résumé, un programme linéaire (PL) est un modèle mathématique qu'on peut écrire sous la forme :

maximiser ou minimiser la fonction objectif :

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i, \ : i = 1, \ldots, m$$

et

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, n$$

où a_{ij}, b_i et c_j sont des réels connus et x_j, $j = 1, \ldots, n$ sont des variables réelles.

La forme matricielle permet de représenter un problème de programmation linéaire sous une forme plus concise.

$$\text{Fonction objectif à optimiser} \qquad z = \boldsymbol{cx} \tag{5.1}$$

$$\text{sous contraintes} \qquad \boldsymbol{Ax} \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} \boldsymbol{b} \tag{5.2}$$

$$\text{et} \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{c}$ est un vecteur-ligne de dimension $(1 \times n)$, $\boldsymbol{x}$ un vecteur-colonne de dimension $(n \times 1)$, $\boldsymbol{A}$ une matrice de dimension $(m \times n)$, $\boldsymbol{b}$ un vecteur-colonne de dimension $(m \times 1)$ et $\boldsymbol{0}$ le vecteur nul à n composantes.

Un problème de programmation linéaire peut se présenter sous différentes formes. En voici la terminologie.

- **Forme canonique**

Si la fonction objectif doit être maximisée et si toutes les contraintes 5.2 sont des inéquations du type $\leq$, on dit que le programme linéaire se présente

sous une forme canonique. Matriciellement, un problème de programmation linéaire se présente sous sa forme canonique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= \boldsymbol{cx} \\ \text{sous contraintes} \quad & \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \text{et} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

où les dimensions sont les mêmes que pour (5.1)-(5.3). À noter que toute contrainte peut être transformée sous forme canonique. Deux cas peuvent alors se présenter.

Premier cas Si la $k^{\text{ème}}$ contrainte est de la forme :

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k \ \ (1 \leq k \leq m)$$

en la multipliant par (-1) on obtient :

$$-a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kn}x_n \leq -b_k$$

Second cas Si la $k^{\text{ème}}$ contrainte est de la forme :

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \ \ (1 \leq k \leq m)$$

on peut transformer cette équation en deux inéquations :

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

et

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k$$

Il suffit alors de multiplier la deuxième inéquation par -1 pour obtenir :

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

et

$$-a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kn}x_n \leq -b_k$$

Exemple 5.1 *Transformons les contraintes :*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

sous forme canonique.

La première contrainte est déjà sous forme canonique. La deuxième doit être multipliée par -1 :

$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2$$

Finalement, pour la troisième contrainte, on pose :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$

et

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 7$$

La contrainte $x_1 + x_2 + x_3 \geq 7$ doit être multipliée par -1. Sous forme canonique, les trois contraintes transformées s'écrivent :

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 5 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 7 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & \leq & -7 \end{array}$$

- **Forme standard**

Un problème de programmation linéaire se présente sous sa forme standard si toutes les contraintes sont des équations. La fonction objectif doit également être maximisée. Sous forme matricielle, la forme standard s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & \boldsymbol{cx} \\ \text{sous contraintes} & & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ & & \text{et } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5.4}$$

- **Transformation minimisation-maximisation**

Tout problème de minimisation peut être transformé en un problème équivalent de maximisation. En effet, le problème :

$$\text{Minimiser } z = \boldsymbol{cx}$$

est équivalent à :

$$\text{Maximiser } (-z) = -\boldsymbol{cx}$$

La raison pour laquelle ces deux formulations sont équivalentes est simple : la solution qui permet d'obtenir la plus petite valeur de z fournit également la plus grande valeur de $(-z)$. La seule différence réside dans le signe de la valeur de la fonction objectif. La valeur minimale de z s'obtient en prenant l'opposé de la valeur maximale de $(-z)$.

Soit la fonction objectif à minimiser :

$$\text{Minimiser } z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

La formulation équivalente en terme de maximisation est :

$$\text{Maximiser } (-z) = -3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

- **Variables d'écart**

La procédure que nous allons développer pour trouver la solution d'un problème de programmation linéaire s'appelle la méthode du simplexe. Cette méthode exige que le programme linéaire soit sous forme standard (5.4). Pour cette raison, il faut transformer les inégalités rencontrées en égalités. Cette transformation se fait simplement en introduisant des variables non-négatives (qui vérifient les contraintes de non-négativité) appelées **variables d'écart**.

Si les contraintes sont du type :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

nous introduisons une nouvelle variable $x_{n+i} \geq 0$ et écrivons :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

De même, nous pouvons être contraints de transformer les contraintes de la forme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

en une égalité en soustrayant cette fois une variable d'écart $x_{n+i} \geq 0$. Nous écrivons alors :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

Remarquons qu'avec l'introduction des variables d'écart, tout problème sous forme canonique possède une forme standard équivalente. Notons encore que la méthode du simplexe requiert des $b_i \geq 0$. Par conséquent, les contraintes qui ont un b_i négatif doivent être transformées en contraintes aux b_i positifs. Cette transformation se fait simplement en multipliant la contrainte par (-1).

Exemple 5.2 *Supposons que les contraintes d'un programme linéaire sont les suivantes :*

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1 + 8x_2 & \geq & 3 \\ x_1 - x_2 = & & -4 \end{array}$$

Exemple 5.3 *Pour les transformer en égalités, il faut introduire une variable d'écart dans la première et la deuxième contrainte. La troisième est déjà sous forme d'égalité mais doit être multipliée par* (-1) *pour avoir un* b_i *positif.*

Ces trois contraintes peuvent donc être reformulées ainsi :

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + 8x_2 - x_4 & = & 3 \\ -x_1 + x_2 & = & 4 \end{array}$$

Nous avons changé les inégalités dans les contraintes en égalités en introduisant des variables d'écart, sans mentionner les effets de cette transformation sur la fonction objectif :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Le réel c_j est souvent appelé le “prix” associé à la variable x_j. En assignant un prix nul à chaque variable d'écart, la transformation des contraintes en un système d'équations linéaires ne change pas la fonction objectif qui est :

$$\begin{aligned} z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+r} \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \end{aligned}$$

où l'indice r indique le nombre de variables d'écart qu'il a fallu rajouter. Ainsi, optimiser une fonction objectif soumise à des contraintes d'inégalité revient à optimiser cette même fonction avec des contraintes d'égalité qui comprennent des variables d'écart.

- **Variables sans restriction de signe**

Dans certains problèmes, il arrive qu'on doive traiter une ou plusieurs variables de signe quelconque. Or la méthode du simplexe ne résout que des problèmes à variables non-négatives. Une variable sans restriction de signe peut alors être décomposée en deux variables non-négatives x^+ et x^- en posant :

$$x = x^+ - x^-$$

où $x^+ = \text{maximum } (0, x)$ et $x^- = \text{maximum } (0, -x)$.

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{sous contraintes} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \text{et} \quad & x_j \text{ sans restriction,} \qquad j = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

Nous transformons chaque variable x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ en deux variables non-négatives x_j^+ et x_j^-. La fonction objectif et les contraintes, qui avaient n variables sans signe, ont désormais $2n$ variables non-négatives. Le programme linéaire se présente alors comme suit :

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser } z & = & c_1(x_1^+ - x_1^-) + \ldots + c_n(x_n^+ - x_n^-) \\ \text{sous contraintes} & & a_{11}(x_1^+ - x_1^-) + \ldots + a_{1n}(x_n^+ - x_n^-) \leq b_1 \\ & & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & & a_{m1}(x_1^+ - x_1^-) + \ldots + a_{mn}(x_n^+ - x_n^-) \leq b_m \\ \text{et} & & x_j^+, x_j^- \geq 0, \quad j = 1, 2..., n \end{array}$$

En résumé, nous avons vu que la fonction objectif d'un programme linéaire peut être présentée sous forme de maximisation, que les contraintes peuvent toujours s'écrire sous forme d'égalité (avec des b_i positifs) et que les variables sans restriction de signe peuvent être décomposées en variables non-négatives. En d'autres termes un programme linéaire peut toujours être présenté sous sa forme standard (5.4).

Exemple 5.4 *Soit le problème de programmation linéaire :*

$$\begin{array}{rrl} \text{Minimiser } z & = & x_1 - 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & -x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & & 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \text{ sans restriction de signe} \end{array}$$

à mettre sous forme standard.

Transformons le problème de minimisation en un problème de maximisation :

$$\text{Maximiser } (-z) = -x_1 + 2x_2$$

L'introduction d'une variable d'écart dans la première contrainte permet de la transformer en égalité :

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \text{ avec } x_3 \geq 0$$

La deuxième contrainte est déjà sous forme d'égalité.

Finalement, il reste à décomposer la variable x_2, qui est sans restriction de signe, en deux variables non-négatives x_2^+ et x_2^- :

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-$$

Le programme linéaire sous sa forme standard s'écrit donc :

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser } (-z) & = & -x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \\ \text{sous contraintes} & & -x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- - x_3 = 5 \\ & & 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- = 4 \\ \text{et} & & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0 \end{array}$$

5.3 Caractérisation des solutions du problème

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment un problème de programmation linéaire pouvait toujours se présenter sous forme standard :

$$\text{Maximiser } z = \boldsymbol{cx} \tag{5.5}$$
$$\text{sous contraintes} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{5.6}$$
$$\text{et} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{5.7}$$

Dans cette formulation, le vecteur $\boldsymbol{x}$ contient toutes les variables, y compris les variables d'écart ; il s'agit d'un vecteur colonne d'ordre $(n \times 1)$. Le vecteur $\boldsymbol{c}$ est un vecteur ligne d'ordre $(1 \times n)$. Quant à la matrice $\boldsymbol{A}$, d'ordre $(m \times n)$, il s'agit de la matrice des coefficients des contraintes transformées. Enfin, le vecteur $\boldsymbol{b}$ d'ordre $(m \times 1)$ est le vecteur du second membre.

On appelle **solution** d'un problème de programmation linéaire tout vecteur $\boldsymbol{x}$ qui satisfait les contraintes (5.6). Une solution est appelée **solution réalisable** si elle vérifie les contraintes de non-négativité (5.7). Dans le cas contraire, on dit que la solution n'est **pas réalisable**.

Une solution réalisable est une **solution optimale** s'il n'existe pas d'autres solutions réalisables qui fournissent une plus grande valeur de la fonction objectif. À noter que dans un problème possédant des solutions réalisables, il se peut que la valeur optimale de la fonction objectif soit infinie. Dans ce cas, on parle de **solution optimale infinie**.

L'ensemble des contraintes (5.6) s'écrit donc comme un système de m équations à n inconnues : $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Pour développer la méthode du simplexe, nous avancerons les hypothèses suivantes :

1. $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$, c'est-à-dire que le système d'équations est compatible,
2. $r(\boldsymbol{A}) = m$, où m est le nombre de contraintes.

La seconde hypothèse permet de former, à partir de $\boldsymbol{A}$, une $(m \times m)$ sous-matrice $\boldsymbol{B}$ non-singulière. Cette matrice $\boldsymbol{B}$ peut être formée par n'importe quel ensemble de m colonnes linéairement indépendantes de $\boldsymbol{A}$. Les colonnes de $\boldsymbol{B}$ seront notées $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, …, $\boldsymbol{b}_m$ (à ne pas confondre avec le second membre $\boldsymbol{b}$). La matrice $\boldsymbol{B}$ est appelée matrice de base puisqu'elle est formée de m vecteurs linéairement indépendants.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les colonnes de $\boldsymbol{A}$ ont été ordonnées de manière à pouvoir écrire $\boldsymbol{A}$ sous la forme $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})$, avec $\boldsymbol{B}$ de dimension $(m \times m)$ la matrice de base et $\boldsymbol{N}$ de dimension $(m \times (n-m))$ contenant les colonnes de $\boldsymbol{A}$ qui n'appartiennent pas à $\boldsymbol{B}$. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ peut être partitionné de façon analogue en posant $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$. Les variables $\boldsymbol{x}_B$ sont appelés **variables de base** et les variables $\boldsymbol{x}_N$ les **variables hors base**.

Finalement le vecteur $\boldsymbol{c}$ peut lui aussi être partitionné de la même manière en $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_B, \boldsymbol{c}_N)$.

Le programme linéaire (5.5)-(5.7) peut donc être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N && (5.8) \\ \text{sous contraintes} &\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} && (5.9) \\ \text{et} &\quad \boldsymbol{x}_B,\ \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0} && (5.10) \end{aligned}$$

La contrainte (5.9) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$$

et puisque $\boldsymbol{B}$ est non-singulière (inversible) :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N \tag{5.11}$$

Lorsque toutes les variables hors base sont nulles, $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, (5.11) devient $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

On appelle **solution de base** la solution :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Lorsque $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, on parle de **solution réalisable de base**.

Exemple 5.5 *Soit le problème de programmation linéaire suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 5x_2 + x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 16 \\ & & 3x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ce problème peut se mettre sous forme standard en introduisant les variables d'écart x_4 et x_5 :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 16 \\ & & 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 20 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Sous forme matricielle, on obtient donc :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formons à partir de $\boldsymbol{A}$ une matrice de base $\boldsymbol{B}$ en prenant par exemple les colonnes 2 et 4, dans cet ordre :

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'une base puisque $\boldsymbol{B}$ est non-singulière ($|\boldsymbol{B}| = 4 \neq 0$).

À noter que dans notre cas, on a :

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 & (2^e \textit{colonne de } \boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_4 & (4^e \textit{colonne de } \boldsymbol{A}). \end{array}$$

À cette matrice de base correspond une solution de base donnée par :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}_B &= \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les autres variables étant nulles, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$.

Cette solution de base n'est pas réalisable pour la simple raison que $x_{B1} = x_2 = -5$ viole la contrainte de non-négativité.

Dans cet exemple, il est très facile de trouver une base qui fournisse une solution réalisable de base. En effet les colonnes $\boldsymbol{a}_4$ et $\boldsymbol{a}_5$ forment une base qui est l'identité :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_4$ et $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_5$.

La solution de base est le vecteur $\boldsymbol{b}$ puisque :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Comme $\boldsymbol{b}$ doit être non-négatif lorsque le problème est présenté sous sa forme standard, la solution est une solution réalisable de base.

Z a pour valeur : $z = 0 \cdot 16 + 0 \cdot 20 = 0$

5.4 Recherche d'une solution optimale

Résultat 5.1 *Tout point extrême est une solution réalisable de base.*

Démonstration

Soit $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ un point extrême de l'ensemble des solutions réalisables. Pour démontrer que $\boldsymbol{x}^*$ est une solution de base, nous allons vérifier que les vecteurs associés aux composantes positives de $\boldsymbol{x}^*$ sont linéairement

indépendants. Supposons que k composantes de $\boldsymbol{x}^*$ sont non-nulles ; numérotons les variables de telle façon que les k premières composantes soient non-nulles. Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}, \;\; x_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, k$$

Si les colonnes correspondant aux composantes non-nulles de $\boldsymbol{x}^*$ sont linéairement dépendantes, alors il existe des λ_i dont certains sont nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

Considérons maintenant :

$$\eta = \min_i \frac{x_i}{\mid \lambda_i \mid}, \;\; \lambda_i \neq 0, \;\; i = 1, \ldots, k$$

Notons que η est un nombre positif. Si nous choisissons un ε, $0 < \varepsilon < \eta$, alors :

$$x_i + \varepsilon\lambda_i > 0 \;\text{ et }\; x_i - \varepsilon\lambda_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, k$$

Définissons un vecteur colonne de n composantes $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ qui a les λ_i dans les k premières positions et zéro pour les $(n-k)$ dernières composantes : $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, 0, \ldots, 0)$.

Écrivons :

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon\boldsymbol{\lambda}; \;\; \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}^* - \varepsilon\boldsymbol{\lambda}$$

Ainsi, $\boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0}$. De plus, comme $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = 0$, on a :

$$\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{0}$$

De sorte que :

$$\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{b}; \;\; \boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{b}$$

Il s'ensuit que $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ sont des solutions réalisables différentes de $\boldsymbol{x}^*$ et :

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2$$

Ce résultat contredit le fait que $\boldsymbol{x}^*$ est un point extrême de l'ensemble convexe et montre ainsi que les k $(k < m)$ colonnes de $\boldsymbol{A}$ sont linéairement indépendantes. Ceci prouve que $\boldsymbol{x}^*$ est une solution réalisable de base.

Ainsi pour trouver la solution optimale, il suffit d'examiner les points extrêmes ou de manière équivalente les solutions réalisables de base.

À la solution réalisable de base initiale correspond une valeur de la fonction objectif z. Le but est d'améliorer la valeur de la fonction objectif en l'évaluant en un point extrême adjacent. Pour cela, étant donné une base $\boldsymbol{B}$, on trouve un point extrême adjacent (nouvelle solution réalisable de base) en échangeant l'une des colonnes de la base ($\boldsymbol{b}_i$) contre une colonne $\boldsymbol{a}_j$ qui n'est pas dans la base. Cependant, en faisant cet échange, il faut s'assurer que la solution de base reste réalisable et que la valeur de la fonction objectif augmente (ou du moins ne diminue pas).

Il y a donc deux règles à suivre pour cet échange. La première consiste à déterminer quelle colonne $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{A}$ (à laquelle correspond une variable x_j) doit entrer dans la base pour améliorer la fonction objectif. La seconde consiste à sélectionner l'une des colonnes $\boldsymbol{b}_i$ qui doit quitter la base de manière à ce que la nouvelle solution de base reste réalisable.

Nous développons ici les critères d'entrée et de sortie de la base pour obtenir une nouvelle solution réalisable de base qui améliore la valeur de la fonction objectif. Il restera ensuite à déterminer si la nouvelle solution réalisable de base est optimale ou non.

Pour développer ces deux critères, nous reformulons le programme linéaire (5.8)-(5.10) sous la forme suivante :

$$\text{Maximiser } z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B + \sum_{j\in J} c_j x_j \tag{5.12}$$

$$\text{sous contraintes} \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \sum_{j\in J} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b} \tag{5.13}$$

$$\text{et} \quad \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}, \ \ x_j \geq 0, \ \ j \in J \tag{5.14}$$

où J est l'ensemble des indices des variables hors base.

Comme $\boldsymbol{B}$ est une base formée de m colonnes linéairement indépendantes, toute colonne $\boldsymbol{a}_j$ de la matrice $\boldsymbol{A}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice $\boldsymbol{B}$. On peut donc écrire :

$$\boldsymbol{a}_j = y_{1j}\boldsymbol{b}_1 + y_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + y_{mj}\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_j$$

On peut également écrire (puisque $\boldsymbol{B}$ est inversible) :

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{5.15}$$

avec

$$\boldsymbol{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

Définissons encore une nouvelle variable z_j par :

$$z_j = y_{1j}c_{B1} + y_{2j}c_{B2} + \ldots + y_{mj}c_{Bm} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_j \tag{5.16}$$

En utilisant (5.15), les contraintes (5.13) s'écrivent :

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{a}_j\right)$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{y}_j \tag{5.17}$$

Introduisons (5.17) dans la fonction objectif (5.12) :

$$z = \boldsymbol{c}_B\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{y}_j\right) + \sum_{j\in J} c_jx_j$$

Finalement, en utilisant (5.16), la fonction objectif s'écrit :

$$z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_j\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_j + \sum_{j\in J} c_jx_j$$

$$z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} x_jz_j + \sum_{j\in J} c_jx_j$$

D'où

$$z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j\in J} (z_j - c_j)x_j \tag{5.18}$$

Lorsqu'on obtient une solution réalisable de base, les valeurs des variables x_j sont nulles pour tout indice $j \in J$. Dans ce cas, la valeur de la fonction objectif est $z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$.

Le but est d'améliorer au maximum cette valeur de z. Dans l'équation (5.18), les variables x_j sont non-négatives et la sommation est précédée du signe négatif. C'est donc la variable x_j, au plus petit $(z_j - c_j) < 0$, qui améliorera le plus la valeur de la fonction objectif. Le critère d'entrée dans la base est donc le suivant.

- **Critère d'entrée dans la base**

Le vecteur $\boldsymbol{a}_k$ qui doit entrer dans la base correspond à la variable hors base x_k pour laquelle $(z_j - c_j)$ a la plus petite valeur négative :

$$z_k - c_k = \min_{j \in J} \; (z_j - c_j) \quad \text{avec} \quad (z_j - c_j) < 0$$

Il reste encore à déterminer quel vecteur de base doit quitter la base. Pour cela, reprenons la solution de base (5.17) :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j \in J} x_j \boldsymbol{y}_j$$

Toutes les variables hors base sont nulles sauf x_k qui devient une variable de base. Comme x_k est une nouvelle variable de base, elle sera notée $\hat{x}_k$. Ainsi la nouvelle solution de base, notée $\hat{x}_B$ s'écrit :

$$\hat{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \hat{x}_k \boldsymbol{y}_k$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de cette solution de base est :

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \hat{x}_k y_{ik} \tag{5.19}$$

Pour que cette solution de base soit réalisable, il faut que les variables de base soient non-négatives, c'est-à-dire :

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \hat{x}_k y_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.20}$$

Les contraintes de non-négativité (5.20) sont évidemment satisfaites pour les variables qui ont un y_{ik} négatif ou nul. En revanche, en ce qui concerne les variables qui ont y_{ik} positif, il faut que :

$$\hat{x}_k \leq \frac{x_{Bi}}{y_{ik}}$$

pour ne pas violer les contraintes de non-négativité. Cette dernière inégalité devant être valable pour tout i tel que $y_{ik} > 0$, $\hat{x}_k$ doit être égale au plus petit rapport x_{Bi}/y_{ik}. Supposons que ce plus petit rapport soit associé à la $r^{\text{ème}}$ variable de base x_{Br}.

Alors en posant :

$$\hat{x}_k = \frac{x_{Br}}{y_{rk}}$$

toutes les contraintes de non-négativité dans (5.20) sont satisfaites et par (5.19) :

$$\hat{x}_{Br} = x_{Br} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{rk} = 0$$

ce qui permet de sortir x_{Br} de la base. Nous avons ainsi obtenu le critère pour sortir une colonne $\boldsymbol{b}_r$ de la base.

- **Critère de sortie de la base**

Soit le vecteur $\boldsymbol{a}_k$ qui doit entrer dans la base. Le vecteur $\boldsymbol{b}_r$ associé à la variable x_{Br} qui doit sortir de la base est celui qui satisfait :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \quad y_{ik} > 0 \right)$$

Voyons à présent comment fonctionnent les critères d'entrée et de sortie de la base en prenant un exemple.

Exemple 5.6 *Soit le programme linéaire :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & & x_1 + x_2 \leq 8 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Après introduction des variables d'écart x_3 et x_4 dans les contraintes, le problème s'écrit sous forme standard :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & & x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_4$ de la matrice $\boldsymbol{A}$ forment une matrice identité. On peut donc les prendre comme base :

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À cette base, correspond la solution réalisable de base :

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ainsi que le vecteur :

$$\boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les variables hors base x_1 et x_2 sont nulles. La valeur de la fonction objectif vaut :

$$z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

À ce stade, les colonnes $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_4$ sont dans la base. Pour savoir quelle colonne doit entrer dans la base ($\boldsymbol{a}_1$ ou $\boldsymbol{a}_2$), il faut calculer $(z_j - c_j)$ pour les variables hors base :

$$\begin{array}{rcl} z_1 - c_1 & = & \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_1 - c_1 \\ z_2 - c_2 & = & \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_2 - c_2 \end{array}$$

Pour faire ce calcul, il faut d'abord évaluer $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_2$. Puisque $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}$ et donc $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{a}_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -4 \\ z_2 - c_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3 \end{aligned}$$

Les deux valeurs étant négatives, le critère d'entrée nous indique que la variable à entrer dans la base (et donc la colonne correspondante) est x_1 puisque $\min(-4, -3) = -4$. Par conséquent, la colonne $\boldsymbol{a}_1$ doit entrer dans la base.

Reste à appliquer le critère de sortie pour savoir quelle colonne doit sortir de la base :

$$\begin{aligned} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} &= \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \quad y_{ik} > 0 \right) \\ &= \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{i1}}, \quad y_{i1} > 0 \right) \\ &= \min \left(\frac{10}{2}, \frac{8}{1} \right) \\ &= \min (5, 8) \\ &= 5 \end{aligned}$$

C'est donc $x_{B1} = x_3$ qui sort de la base.

En définitive, la colonne $\boldsymbol{a}_1$ remplace la colonne $\boldsymbol{a}_3$ pour former une nouvelle base.

Calculons la nouvelle valeur de la variable x_1 qui entre dans la base :

$$\hat{x}_1 = \frac{x_{Br}}{y_{r1}} = \frac{x_{B1}}{y_{11}} = \frac{10}{2} = 5$$

Les nouvelles valeurs des variables de base d'origine se calculent à partir de (5.19) :

$$\hat{x}_{B1} = \hat{x}_3 = x_{B1} - \hat{x}_1 y_{11} = 10 - 5(2) = 0$$

Ce résultat correspond à la théorie développée jusqu'ici puisque x_3 sort de la base et que les variables hors base sont nulles.

$$\hat{x}_{B2} = \hat{x}_4 = x_{B2} - \hat{x}_1 y_{21} = 8 - 5(1) = 3$$

L'équation (5.18) nous permet de calculer la nouvelle valeur de z

$$\begin{aligned}
\hat{z} &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) \hat{x}_j \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} - (z_1 - c_1)\hat{x}_1 - (z_2 - c_2)\hat{x}_2 \\
&= 0 - [(-4)5 + (-3)0] \\
&= 20
\end{aligned}$$

On peut également obtenir ce résultat en substituant dans la fonction objectif les nouvelles variables :

$$\hat{z} = 4\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 = 4(5) + 3(0) = 20$$

La valeur de la fonction objectif s'est améliorée en passant de 0 à 20. À ce stade, nous disposons de la solution réalisable de base suivante :

$$x_1 = 5, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_4 = 3$$

La matrice de base $\boldsymbol{B}$ est formée par les colonnes $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_4$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En outre :

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Voyons si la valeur de la fonction objectif peut être améliorée en calculant à nouveau $(z_j - c_j)$ pour les variables hors base.

Pour cela, calculons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
z_2 - c_2 &= \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 3 = -1 \\
z_3 - c_3 &= \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} - 0 = 2
\end{aligned}$$

Le critère d'entrée est ici très simple à appliquer puisqu'il n'existe qu'une valeur de $(z_j - c_j)$ négative. C'est donc la colonne $\boldsymbol{a}_2$ correspondant à la variable x_2 qui entre dans la base.

Appliquons à présent le critère de sortie :

$$\begin{aligned}
\frac{x_{Br}}{y_{rk}} &= \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{i2}}, \quad y_{i2} > 0\right) \\
&= \min \left(\frac{5}{1/2}, \frac{3}{1/2}\right) \\
&= \min(10, 6) \\
&= 6
\end{aligned}$$

C'est donc la colonne $\boldsymbol{a}_4$ associée à la variable x_4 qui sort de la base.

La nouvelle valeur de la variable x_2 qui entre dans la base est :

$$\hat{x}_2 = \frac{x_{Br}}{y_{r2}} = \frac{x_{B2}}{y_{22}} = \frac{3}{1/2} = 6$$

Les nouvelles valeurs des variables $x_{B1} = x_1$ et $x_{B2} = x_4$ sont :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{B1} &= \hat{x}_1 = x_{B1} - \hat{x}_2 y_{12} = 5 - 6\,(1/2) = 2 \\
\hat{x}_{B2} &= \hat{x}_4 = x_{B2} - \hat{x}_2 y_{22} = 3 - 6\,(1/2) = 0
\end{aligned}$$

La nouvelle valeur de la fonction objectif est :

$$
\begin{aligned}
\hat{z} &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} - \textstyle\sum_{j \in J} (z_j - c_j) \hat{x}_j \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} - (z_2 - c_2)\hat{x}_2 - (z_3 - c_3)\hat{x}_3 \\
&= 20 - [(-1)6 + (2)0] \\
&= 26
\end{aligned}
$$

Avec cette nouvelle solution réalisable de base $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$, la valeur de la fonction objectif s'est encore améliorée ! On peut tout naturellement se demander si cette valeur peut encore être améliorée.

Pour le savoir, calculons $(z_j - c_j)$ pour les variables hors base, c'est-à-dire x_3 et x_4 ; la matrice de base $\boldsymbol{B}$ est formée des colonnes $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$:

$$
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{y}_4 &= \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
z_3 - c_3 &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 1 \\
z_4 - c_4 &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 2
\end{aligned}
$$

On ne peut plus appliquer le critère d'entrée puisque tous les $(z_j - c_j)$ sont non-négatifs. Dans ce cas, la valeur de z ne peut plus être améliorée ; la solution réalisable de base correspondant à cette situation est la solution optimale, comme l'indique le résultat 5.2.

Résultat 5.2 *La solution réalisable de base associée à la base $\boldsymbol{B}$ est optimale si :*

$$(z_j - c_j) \geq 0$$

pour chaque colonne $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{A}$ qui n'est pas dans la base.

Démonstration
Soit un problème de programmation linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= \boldsymbol{cx} \\ \text{sous contraintes} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ \text{et} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

pour lequel nous avons une solution réalisable de base $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ telle que $(z_j - c_j) \geq 0$ pour toutes les colonnes $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{A}$ qui ne sont pas dans la base. La valeur de la fonction objectif pour cette solution est $z_0 = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B$. Il faut montrer que z_0 est la valeur maximum de la fonction objectif $z = \boldsymbol{cx}$.

Soit une solution réalisable quelconque pour $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b} \tag{5.21}$$

La valeur correspondante de la fonction objectif, notée z^*, est :

$$z^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{5.22}$$

Pour montrer que z_0 est la valeur maximum de la fonction objectif, il faut montrer que $z_0 \geq z^*$.

Pour cela, montrons tout d'abord que $(z_j - c_j) = 0$ pour les colonnes de $\boldsymbol{A}$ qui se trouvent dans la base. Rappelons que nous avons défini (5.15) et (5.16) respectivement par $\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$ et $z_j = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_j$.

Ainsi, pour les vecteurs $\boldsymbol{a}_j$ qui se trouvent dans la base :

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i$$

où $\boldsymbol{b}_i$ est la i^{e} colonne de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{e}_i$ le vecteur unitaire d'indice i. En utilisant (5.16) et le fait que $\boldsymbol{B}_i = j$, on obtient :

$$z_j - c_j = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_j - c_j = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{e}_i - c_j = c_{Bi} - c_j = c_j - c_j = 0$$

Puisque, par hypothèse, $(z_j - c_j) \geq 0$ pour les colonnes de $\boldsymbol{A}$ hors base et $(z_j - c_j) = 0$ pour les colonnes de $\boldsymbol{A}$ située dans la base, on a $(z_j - c_j) \geq 0$, c'est-à-dire $z_j \geq c_j$ pour toutes les colonnes de $\boldsymbol{A}$. Par conséquent :

$$z_1x_1 + z_2x_2 + \ldots + z_nx_n \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

En utilisant (5.22), on en déduit que :

$$\sum_{j=1}^{n} z_jx_j \geq z^* \tag{5.23}$$

Calculons $\boldsymbol{x}_B$ en utilisant (5.15) et (5.21) :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{y}_j$$

En utilisant à présent (5.16), calculons z_0 :

$$z_0 = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}_B\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{y}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{y}_j = \sum_{j=1}^{n} x_jz_j \tag{5.24}$$

Si l'on compare (5.23) à (5.24), on obtient :

$$z_0 = \sum_{j=1}^{n} x_jz_j = \sum_{j=1}^{n} z_jx_j \geq z^*$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 5.1 *Il se peut que la solution optimale d'un problème de programmation linéaire possédant une solution réalisable de base soit infinie.*

C'est le cas lorsqu'il existe une variable hors base x_s pour laquelle $(z_s - c_s) < 0$ et $y_{is} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. En effet, dans ce cas, la solution réalisable de base (5.17) :

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j \in J} x_j\boldsymbol{y}_j$$

pour laquelle $x_j = 0, \forall j \in J$ peut être transformée en une solution réalisable : $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - x_s\boldsymbol{y}_s$, puisque $y_{is} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Ainsi, en attribuant à la variable

hors base x_s une valeur arbitrairement grande ($x_s \longrightarrow +\infty$), cette solution reste réalisable.

La valeur de la fonction objectif (5.18) :

$$z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

devient dans ce cas :

$$z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} - (z_s - c_s) x_s$$

Par conséquent, la valeur de z tend vers $+\infty$ lorsque $x_s \longrightarrow +\infty$ puisque $(z_s - c_s) < 0$.

Exemple 5.7 *Illustrons le cas d'un problème possédant une solution optimale infinie en considérant le problème de programmation linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \textit{Maximiser } z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \textit{sous contraintes} 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ \textit{et } x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce problème possède une solution optimale infinie puisqu'en posant $x_1 = 0$ et en faisant tendre x_2 vers $+\infty$ toutes les contraintes sont satisfaites et la valeur de la fonction objectif tend vers $+\infty$.

Voyons à présent les résultats obtenus en partant d'une solution réalisable de base. Pour cela, transformons le problème sous forme standard :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & & 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La base la plus simple, c'est-à-dire $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, est formée par les vecteurs $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_4$ de la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
x_{B1} &= x_3 = 4 \\
x_{B2} &= x_4 = 6 \\
et\ z &= \boldsymbol{C_B x_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Voyons si la situation peut être améliorée en calculant:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
z_1 - c_1 &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 = -5 \\
z_2 - c_2 &= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{y}_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 = -3
\end{aligned}$$

La plus petite valeur des $(z_j - c_j)$ négatifs est $z_1 - c_1 = -5$. On peut donc améliorer la valeur de la fonction objectif, puisqu'au moins un élément de $\boldsymbol{y}_1$ est positif. Cependant, $z_2 - c_2 = -3$ est négatif et tous les éléments de $\boldsymbol{y}_2$ le sont également. On peut donc en conclure que la solution optimale est infinie.

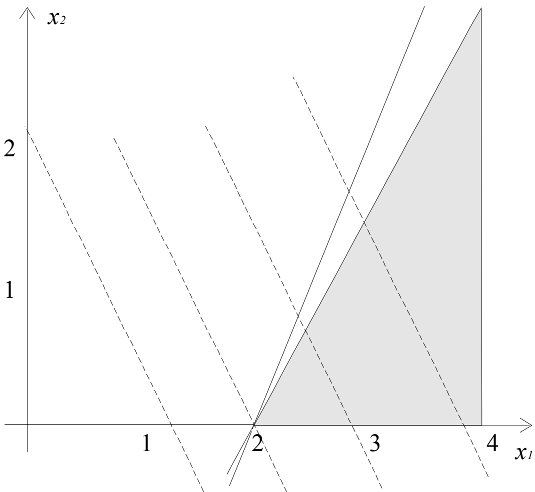


Figure 5.1 : Région réalisable non bornée (solution optimale infinie)

Ce résultat peut également s'expliquer de manière géométrique en traçant l'ensemble des solutions réalisables. La figure 5.1 montre que la région réalisable n'est pas bornée et donc que la valeur de la fonction objectif peut être infinie.

Nous sommes à présent en mesure de fournir un algorithme pour la méthode du simplexe lorsque l'on connaît une solution réalisable de base. Pour cela, on suppose que le problème initial a été transformé sous forme standard avec tous les b_i positifs. Les étapes à suivre sont les suivantes.

- **Étapes de la méthode du simplexe**

Étape 5.1 Rechercher la solution optimale à partir d'une solution réalisable de base : $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Étape 5.2 Examiner les $(z_j - c_j)$ pour toutes les colonnes $\boldsymbol{a}_j$ qui ne sont pas dans la base. Si tous les $(z_j - c_j) \geq 0$, passer à l'étape 5.6, sinon passer à l'étape 5.3.

Étape 5.3 S'il existe un $(z_j - c_j)$ négatif pour lequel il n'y a pas d'éléments positifs dans $\boldsymbol{y}_j$, arrêter la recherche puisque la solution optimale est infinie. Sinon, choisir le vecteur (et donc la variable) associée à la valeur la plus négative des $(z_j - c_j)$ pour entrer dans la base :

$$z_k - c_k = \min_{j \in J} \ (z_j - c_j) \ \text{ avec } \ (z_j - c_j) < 0$$

Étape 5.4 Déterminer le vecteur (et donc la variable) qui sort de la base à l'aide du critère :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \ \ y_{ik} > 0 \right)$$

Étape 5.5 Établir la nouvelle base, calculer la nouvelle solution réalisable de base et la nouvelle valeur de la fonction objectif.
Retourner à l'étape 5.2.

Étape 5.6 La solution réalisable de base courante est la solution optimale. La solution optimale n'est pas unique s'il existe un $(z_j - c_j)$ nul pour un vecteur $\boldsymbol{a}_j$ qui ne se trouve pas dans la base.

5.5 Tableaux du simplexe et procédure de calcul

Lorsque l'on calcule la méthode du simplexe à la main, il est préférable de travailler avec un tableau qui contient toutes les données nécessaires. À chaque itération correspond un nouveau tableau prenant la forme suivante :

			c_1		c_j		c_n
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\dots$	$\boldsymbol{a}_j$	$\dots$	$\boldsymbol{a}_n$
c_{B1}	$\boldsymbol{b}_1$	$x_{B1} = y_{10}$	y_{11}	$\dots$	y_{1j}	$\dots$	y_{1n}
c_{B2}	$\boldsymbol{b}_2$	$x_{B2} = y_{20}$	y_{21}	$\dots$	y_{2j}	$\dots$	y_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
c_{Bm}	$\boldsymbol{b}_m$	$x_{Bm} = y_{m0}$	y_{m1}		y_{mj}		y_{mn}
		$z = y_{m+1,0}$	$z_1 - c_1 = y_{m+1,1}$	$\dots$	$z_j - c_j = y_{m+1,j}$	$\dots$	$z_n - c_n = y_{m+1,n}$

Tableau 5.1 : Tableau du simplexe

La première colonne indique les prix $\boldsymbol{c}_B$ correspondant aux vecteurs de base. La deuxième colonne indique quels vecteurs se trouvent dans la base. Les vecteurs $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \dots, m$ représentent les m colonnes de la matrice de base $\boldsymbol{B}$. Si la matrice de base est formée des colonnes $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_4$ par exemple, on écrira $\boldsymbol{a}_1$ à la place de $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ à la place de $\boldsymbol{b}_2$ et $\boldsymbol{a}_4$ à la place de $\boldsymbol{b}_3$. La troisième colonne du tableau fournit la solution réalisable de base $\boldsymbol{x}_B$ sauf à la dernière ligne où l'on trouve la valeur de z pour la solution réalisable de base. Les colonnes suivantes indiquent les valeurs des $\boldsymbol{y}_j$ pour tous les vecteurs de $\boldsymbol{A}$. La première ligne donne les prix associés aux variables et la dernière ligne donne les $(z_j - c_j)$.

Voyons comment utiliser les informations données par le tableau pour effectuer les différentes étapes de la méthode du simplexe.

En premier lieu, examinons les éléments de la dernière ligne $(z_j - c_j)$ correspondant aux vecteurs hors base $\boldsymbol{a}_j$. Si tous les $(z_j - c_j) \geq 0$, la solution est optimale. S'il existe un $(z_j - c_j) < 0$ pour lequel il n'existe pas d'éléments positifs dans $\boldsymbol{y}_j$ (la colonne au-dessus de $(z_j - c_j)$), la solution est infinie. Si tel n'est pas le cas, nous choisissons le plus petit $(z_j - c_j)$. Appelons la colonne correspondante k. Ainsi $\boldsymbol{a}_k$ entre dans la base. Le vecteur qui doit

sortir de la base est choisi par le critère :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \ \ y_{ik} > 0 \right)$$

Cela signifie que le vecteur de la $r^{\text{ème}}$ ligne dans la colonne "vecteurs de base" est remplacé par $\boldsymbol{a}_k$. Les valeurs nécessaires au calcul de ce critère sont faciles à trouver, puisque les valeurs x_{Bi} se trouvent en regard des valeurs y_{ik}.

Il faut à présent tracer un nouveau tableau. À l'intersection de la colonne $\boldsymbol{a}_k$ qui entre dans la base et du vecteur $\boldsymbol{b}_r$ qui en sort, se trouve le terme y_{rk} qui est appelé le **pivot** de la transformation. La colonne $\boldsymbol{a}_k$ est appelée **colonne-pivot** et le vecteur $\boldsymbol{b}_r$ **ligne-pivot**. Il est utile d'encercler dans le tableau le pivot ainsi que la colonne-pivot et la ligne-pivot. Établissons les formules de transformation en ajoutant le symbole "ˆ" au-dessus des nouvelles valeurs afin de les distinguer des anciennes. Les nouvelles valeurs des variables de base se calculent facilement à partir des anciennes.

En effet, nous avons vu que la nouvelle variable qui entre dans la base est :

$$\hat{x}_{Br} = \hat{x}_k = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \tag{5.25}$$

En substituant (5.25) dans (5.19), nous obtenons :

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{ik} \quad \ i \neq r \tag{5.26}$$

Développons à présent les formules de transformation afin de calculer les termes $\hat{y}_{ij}$. Toute colonne $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{A}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des anciens vecteurs de base :

$$\boldsymbol{a}_j = y_{1j}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + y_{mj}\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\boldsymbol{b}_i \tag{5.27}$$

Or le vecteur $\boldsymbol{a}_k$ a remplacé le vecteur $\boldsymbol{b}_r$ dans la base. De (5.27), en posant $j = k$, on déduit que :

$$\boldsymbol{b}_r = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \boldsymbol{b}_i + \frac{1}{y_{rk}} \boldsymbol{a}_k \tag{5.28}$$

Substituons (5.28) dans (5.27) :

$$\boldsymbol{a}_j = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\boldsymbol{a}_k + \sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right)\boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{m}\hat{y}_{ij}\hat{b}_i \tag{5.29}$$

où $\hat{b}_i = \boldsymbol{b}_i$, $i \neq r$ et $\hat{b}_r = \boldsymbol{a}_k$. Si l'on compare les deux égalités dans (5.29), on trouve :

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{ik}, \quad i \neq r \tag{5.30}$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \tag{5.31}$$

Calculons les nouvelles valeurs $(\hat{z}_j - c_j)$ en utilisant la définition :

$$\hat{z}_j - c_j = \hat{c}_B\hat{y}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m}\hat{c}_{Bi}\hat{y}_{ij} - c_j \tag{5.32}$$

avec $\hat{c}_{Bi} = c_{Bi}$, $i \neq r$ et $\hat{c}_{Br} = c_k$. En utilisant les résultats (5.30) et (5.31), l'équation (5.32) devient :

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m} c_{Bi}\left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) + c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j \tag{5.33}$$

À noter que la sommation peut se faire sans la restriction $i \neq r$ puisque le terme correspondant à cet indice est nul :

$$c_{Br}\left(y_{rj} - y_{rj}\frac{y_{rk}}{y_{rk}}\right) = 0$$

Ainsi, l'équation (5.33) peut s'écrire :

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{Bi}y_{ik} - c_k\right)$$

ou de manière équivalente :

$$\hat{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \tag{5.34}$$

Enfin, déterminons $\hat{z}$, la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$\hat{z} = \hat{c}_B \hat{x}_B = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_{Bi} \hat{x}_{Bi} \tag{5.35}$$

Avec (5.25), (5.26) et le fait que $\hat{c}_{Bi} = c_{Bi}$, $i \neq r$, $\hat{c}_{Br} = c_k$, on obtient :

$$\hat{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{ik} \right) + c_k \frac{x_{Br}}{y_{rk}}$$

Dans la sommation, le terme pour $i = r$ étant nul on peut omettre la restriction $i \neq r$. On obtient alors :

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi} - \left(\sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \right) + c_k \frac{x_{Br}}{y_{rk}}$$

Puisque $z_k = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik}$ et $z = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi}$, on a finalement :

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} (z_k - c_k). \tag{5.36}$$

Toutes les valeurs nécessaires à l'établissement du nouveau tableau sont à présent disponibles et sont résumées dans la table 5.1.

$\hat{x}_{Br} = \hat{x}_k = \frac{x_{Br}}{y_{rk}}$	(5.25)
$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{ik}, \quad i \neq r$	(5.26)
$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik}, \quad i \neq r$	(5.30)
$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	(5.31)
$\hat{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$	(5.34)
$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$	(5.36)

Table 5.1: Établissement du nouveau tableau lorsque la variable x_k remplace x_{Br} dans la base

Les formules de la table 5.1 peuvent a priori paraître compliquées, mais leur utilisation dans les tableaux du simplexe est grandement simplifiée par plusieurs raisons: tout d'abord, en posant $x_{Bi} = y_{i0}$, $z_j - c_j = y_{m+1,j}$ et

$z = y_{m+1,0}$, les transformations indiquées dans la table 5.1 peuvent toutes s'effectuer à l'aide des deux formules :

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik}, \quad i \neq r \tag{5.30}$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \tag{5.31}$$

où $i = 1, \ldots, m+1$ et $j = 0, \ldots, n$.

Notons qu'il est plus facile de calculer une ligne entière avant de changer de ligne puisque y_{ik}/y_{rk} est une constante pour une ligne i donnée.

Voyons dans l'exemple suivant comment établir les tableaux du simplexe afin d'obtenir la solution optimale.

Exemple 5.8 *Reprenons l'exemple 4.1 qui a été traité graphiquement au chapitre 4.*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Tout d'abord, passons ce programme linéaire sous forme standard.

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Appliquons les différentes étapes de la méthode du simplexe.

Étape 1 Le tableau initial du simplexe est donné dans le tableau 5.2.

	c_j		3	4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
0	$\boldsymbol{a}_3$	12	2	1	1	0
0	$\boldsymbol{a}_4$	12	1	2	0	1
	$(z_j - c_j)$	$z = 0$	-3	-4	0	0

Tableau 5.2 : Tableau initial du simplexe

La base $\boldsymbol{B}$ est formée par les vecteurs $\boldsymbol{a}_3$ et $\boldsymbol{a}_4$ et correspond à la matrice identité. La solution réalisable de base correspondante est donnée par $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$. Les termes $(z_j - c_j)$ correspondant aux vecteurs de base sont nuls et ceux correspondant aux vecteurs hors base s'obtiennent en calculant :

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= c_{B1}y_{11} + c_{B2}y_{21} - c_1 = 0(2) + 0(1) - 3 = -3 \\ z_2 - c_2 &= c_{B1}y_{12} + c_{B2}y_{22} - c_2 = 0(1) + 0(2) - 4 = -4 \end{aligned}$$

Enfin, la fonction objectif a pour valeur :

$$z = c_{B1}x_{B1} + c_{B2}x_{B2} = 0(12) + 0(12) = 0$$

Étape 2 Dans le tableau 5.2, nous voyons qu'il reste des $(z_j - c_j)$ négatifs. Nous passons donc à l'étape 3.

Étape 3 Les vecteurs $\boldsymbol{y}_j$ situés au-dessus des $(z_j - c_j)$ négatifs n'ont que des éléments positifs. Une amélioration de la fonction objectif est donc possible et nous cherchons le vecteur qui doit entrer dans la base.

La plus petite valeur négative des $(z_j - c_j)$ est -4 obtenue pour $(z_2 - c_2)$. Ainsi, $k = 2$ et le vecteur $\boldsymbol{a}_2$ entre dans la base. La colonne correspondante est la colonne-pivot qui a été encadrée dans le tableau 5.2. Pour connaître le vecteur qui sort de la base, nous passons à l'étape 4.

Étape 4 Examinons les rapports x_{Bi}/y_{i2} avec $y_{i2} > 0$:

$$\frac{x_{B1}}{y_{12}} = \frac{12}{1} = 12$$

et

$$\frac{x_{B2}}{y_{22}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Le plus petit rapport est 6 et correspond à x_{B2}/y_{22}. Ainsi, $r = 2$ et le vecteur $\boldsymbol{a}_4$ (correspondant à la variable $x_{B2} = x_4$) sort de la base. La ligne correspondante est la ligne-pivot qui a été encadrée dans le tableau 5.2. Il reste à établir le nouveau tableau à l'étape 5.

Étape 5 Puisque $\boldsymbol{a}_2$ remplace $\boldsymbol{a}_4$ dans la base, on remplace $c_{B2} = c_4 = 0$ par $c_2 = 4$ dans la colonne $\boldsymbol{c}_B$. Tous les autres éléments du nouveau tableau se calculent à partir des formules (5.30) et (5.31). Commençons

par calculer les éléments de la ligne-pivot à l'aide de (5.31) $\hat{y}_{rj} = y_{rj}/y_{rk}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{20} &= \hat{x}_{B2} = \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{12}{2} = 6 \\
\hat{y}_{21} &= \frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{2} \\
\hat{y}_{22} &= \frac{y_{22}}{y_{22}} = 1 \\
\hat{y}_{23} &= \frac{y_{23}}{y_{22}} = 0 \\
\hat{y}_{24} &= \frac{y_{24}}{y_{22}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Calculons à présent la première ligne à l'aide de (5.30) : $\hat{y}_{1j} = y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k}$. À noter que $\frac{y_{1k}}{y_{rk}} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = 1/2$ est une constante pour cette ligne.

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{10} &= \hat{x}_{B1} = y_{10} - \frac{1}{2}(y_{20}) = 12 - \frac{1}{2}(12) = 6 \\
\hat{y}_{11} &= y_{11} - \frac{1}{2}(y_{21}) = 2 - \frac{1}{2}(1) = \frac{3}{2} \\
\hat{y}_{12} &= y_{12} - \frac{1}{2}(y_{22}) = 1 - \frac{1}{2}(2) = 0 \\
\hat{y}_{13} &= y_{13} - \frac{1}{2}(y_{23}) = 1 - \frac{1}{2}(0) = 1 \\
\hat{y}_{14} &= y_{14} - \frac{1}{2}(y_{24}) = 0 - \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les éléments de la dernière ligne : $\hat{y}_{3j} = y_{3j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{3k}$. Ici, $\frac{y_{3k}}{y_{rk}} = \frac{y_{32}}{y_{22}} = \frac{-4}{2} = -2$.

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{30} &= \hat{z} = y_{30} - (-2)y_{20} = 0 + 2(12) = 24 \\
\hat{y}_{31} &= (\hat{z}_1 - c_1) = y_{31} + 2(y_{21}) = -3 + 2(1) = -1 \\
\hat{y}_{32} &= (\hat{z}_2 - c_2) = y_{32} + 2(y_{22}) = -4 + 2(2) = 0 \\
\hat{y}_{33} &= (\hat{z}_3 - c_3) = y_{33} + 2(y_{23}) = 0 + 2(0) = 0 \\
\hat{y}_{34} &= (\hat{z}_4 - c_4) = y_{34} + 2(y_{24}) = 0 + 2(1) = 2
\end{aligned}$$

Le tableau 5.3 représente le nouveau tableau du simplexe.

Avant de retourner à l'étape 2, mentionnons que certains calculs effectués lors de l'étape 5 ne sont pas nécessaires. En effet les $(z_j - c_j)$ correspondant aux vecteurs dans la base sont forcément nuls. Le vecteur qui entre dans la base devient un vecteur unitaire avec pour composantes : 1 à la place de l'élément pivot et 0 ailleurs. Le vecteur qui reste dans la base n'est pas modifié. De plus, la ligne-pivot est très facilement calculée puisque chaque élément de cette ligne est divisé par l'élément pivot. Nous appliquerons ces remarques dans les calculs suivants.

	c_j		3	4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
0	$\boldsymbol{a}_3$	6	3/2	0	1	−1/2
4	$\boldsymbol{a}_2$	6	1/2	1	0	1/2
	$(z_j - c_j)$	24	−1	0	0	2

Tableau 5.3 : Tableau du simplexe obtenu après une itération

Étape 2 Dans le tableau 5.3, il reste un $(z_j - c_j)$ négatif. Par conséquent, nous passons à l'étape 3.

Étape 3 Seul $z_1 - c_1 = -1$ est négatif et tous les éléments de $\boldsymbol{y}_1$ sont positifs. Par conséquent $k = 1$ et le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ entre dans la base ; passons à l'étape 4.

Étape 4 Calculons les rapports x_{Bi}/y_{i1}, $y_{i1} > 0$:

$$\frac{x_{B1}}{y_{11}} = \frac{6}{3/2} = 4$$

$$\frac{x_{B2}}{y_{21}} = \frac{6}{1/2} = 12$$

Le plus petit rapport correspond à $x_{B1}/y_{11} = 4$, d'où $r = 1$. Le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ sort donc de la base. Calculons le nouveau tableau à l'étape 5.

Étape 5 Puisque $\boldsymbol{a}_1$ entre dans la base pour se substituer à $\boldsymbol{a}_3$, on remplace $c_{B1} = 0$ par $c_1 = 3$. L'élément pivot étant $y_{11} = 3/2$, tous les éléments de la ligne-pivot sont divisés par $3/2$. Le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ qui entre dans la base devient le vecteur unitaire avec pour composantes : 1 à la place de l'élément pivot et 0 ailleurs. Le vecteur $\boldsymbol{a}_2$ qui reste dans la base n'est pas modifié. De plus $\hat{z}_1 - c_1 = 0$ et $\hat{z}_2 - c_2 = 0$, puisque $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ se trouvent dans la base. Les autres éléments se calculent à l'aide de (5.30) comme suit :

$$\hat{y}_{20} = \hat{x}_{B2} = y_{20} - \frac{1}{3}(y_{10}) = 6 - \frac{1}{3}(6) = 4$$

$$\hat{y}_{23} = y_{23} - \frac{1}{3}(y_{13}) = 0 - \frac{1}{3}(1) = -\frac{1}{3}$$

$$\hat{y}_{24} = y_{24} - \frac{1}{3}(y_{14}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\hat{y}_{30} = \hat{z} = y_{30} + \frac{2}{3}(y_{10}) = 24 + \frac{2}{3}(6) = 28$$

$$\hat{y}_{33} = \hat{z}_3 - c_3 = y_{33} + \frac{2}{3}(y_{13}) = 0 + \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$\hat{y}_{34} = \hat{z}_4 - c_4 = y_{34} + \frac{2}{3}(y_{14}) = 2 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$$

	c_j		3	4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
3	$\boldsymbol{a}_1$	4	1	0	2/3	−1/3
4	$\boldsymbol{a}_2$	4	0	1	−1/3	2/3
	$(z_j - c_j)$	28	0	0	2/3	5/3

Tableau 5.4 : Tableau du simplexe obtenu après deux itérations

Retournons à l'étape 2.

Étape 2 Tous les $(z_j - c_j)$ correspondant aux vecteurs hors base sont strictement positifs, nous passons donc à l'étape 6.

Étape 6 Puisque $(z_j - c_j) > 0$, $\forall j \in J$, la solution optimale est donnée par :

$$
\begin{aligned}
x_{B1} &= x_1 = 4 \\
x_{B2} &= x_2 = 4
\end{aligned}
$$

Les variables hors base sont nulles : $x_3 = x_4 = 0$.

La valeur de la fonction objectif est $z = 28$.

Observons les solutions x_1 et x_2 obtenues à chaque itération. Dans le tableau initial, $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Après la première itération, $x_1 = 0$ et $x_2 = 6$. Finalement, à la seconde et dernière itération, $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$. L'interprétation graphique de ces résultats est immédiate. En effet, dans notre exemple, la méthode du simplexe part de l'origine (0 ;0). À chaque itération on évalue la valeur de la fonction objectif en un point extrême adjacent :
(0 ;6) à la première itération et (4 ;4) à la seconde, comme indiqué sur la figure 5.2. La méthode fournit la solution optimale $x_1 = x_2 = 4$.

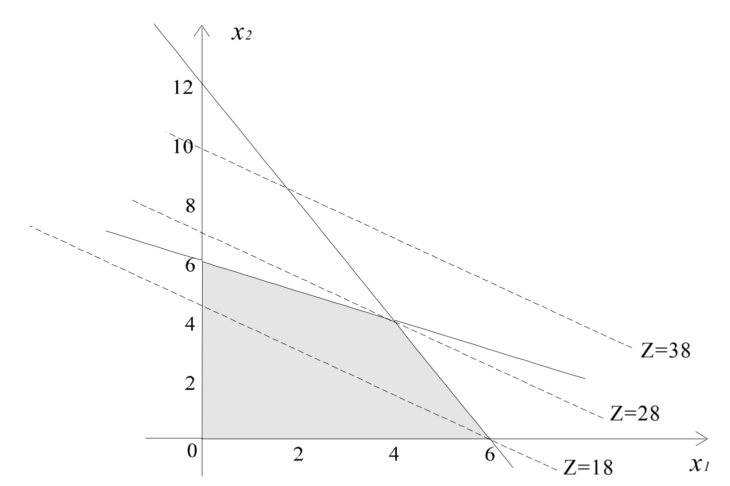


Figure 5.2 : Région réalisable et fonction objectif pour $z_1 = 18$, $z_2 = 28$ et $z_3 = 38$

Jusqu'à présent, nous avons toujours étudié des cas où une solution réalisable de base initiale était connue. Cependant, cette situation (idéale) ne se rencontre pas dans tous les problèmes de programmation linéaire. Nous verrons donc dans le chapitre suivant comment trouver une solution réalisable de base initiale.

5.6 Recherche d'une solution réalisable de base initiale

Jusqu'ici nous avons vu comment trouver une solution réalisable de base initiale lorsque toutes les contraintes sont sous forme d'inégalités du type "$\leq$". Dans ce cas, en ajoutant une variable d'écart à chaque contrainte pour la transformer en une égalité, la matrice $\boldsymbol{A}$ qui correspond à l'ensemble des contraintes $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ prend la forme :

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité d'ordre $(m \times m)$, puisqu'il y a m contraintes. L'intérêt d'obtenir au départ une matrice identité comme sous-matrice de $\boldsymbol{A}$ est évident. En effet, comme $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ est une matrice de base, une solution réalisable de base est immédiatement trouvée sous la forme : $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$. De plus, $\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$ et $\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{0}$ puisque les prix associés aux variables d'écart sont nuls.

À noter que cette matrice identité peut apparaître sans que les variables d'écart aient été rajoutées. Dans ce cas, la méthode du simplexe s'applique également, à la différence près que les prix associés aux variables de base ne sont pas nuls.

Cependant, il n'existe pas, le plus souvent, de sous-matrice identité dans la matrice $\boldsymbol{A}$. C'est le cas par exemple lorsque des contraintes n'ont pas besoin de l'adjonction de variables d'écart (contraintes déjà sous forme d'égalités). On peut néanmoins obtenir une matrice identité comme matrice de base initiale en considérant le nouveau système de contraintes :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_a = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_a \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{5.37}$$

dans lequel nous avons ajouté m variables x_{ai}, $i = 1, \ldots, m$, dont les colonnes correspondantes sont les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ (vecteurs unitaires). Ces nouvelles variables sont appelées **variables artificielles** car elles n'ont aucune signification pour le système original de contraintes. Les vecteurs artificiels $\boldsymbol{e}_i$ qui correspondent aux variables artificielles seront désignés par $\boldsymbol{q}_i$ de manière à les distinguer des vecteurs $\boldsymbol{a}_j$ de la matrice $\boldsymbol{A}$. Nous avons fait apparaître une matrice identité comme matrice de base initiale. Nous disposons donc immédiatement d'une solution réalisable de base pour (5.37) qui est $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Nous noterons toutefois qu'il ne s'agit pas d'une solution réalisable du système original. Pour qu'une solution de (5.37) soit aussi une solution du système original, il faut que $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{0}$, c'est-à-dire que toutes les variables artificielles sortent de la base. Nous allons donc donner à ces variables artificielles des prix très défavorables, de façon à ce que la fonction objectif puisse être améliorée tant qu'une de ces variables reste dans la base. Si la fonction objectif z doit être maximisée, en donnant un prix négatif très grand à chaque variable artificielle, on peut s'attendre à ce que z s'améliore aussi longtemps qu'une variable artificielle se trouve dans la base avec une valeur positive. Nous notons donc par c_{ai} le prix associé à la variable artificielle x_{ai} et posons :

$$c_{ai} = -M, \quad M > 0$$

À noter que dans un problème de minimisation, on pose :

$$c_{ai} = +M, \quad M > 0$$

Pour les calculs à la main, M n'a en général pas de valeur précise. M est introduit dans le tableau du simplexe comme paramètre et est considéré

comme suffisamment grand par rapport aux autres coefficients de la fonction objectif. Pour les calculs sur ordinateur, M est souvent égal à mille fois la valeur du prix le plus élevé correspondant à une vraie variable. C'est pourquoi, on parle souvent de la méthode du "big M" qui est illustrée dans le paragraphe suivant.

5.7 La méthode du big M

Lorsque, dans un problème de programmation linéaire sous forme standard (5.4), la matrice $\boldsymbol{A}$ ne contient pas de sous-matrice identité, on considère le problème augmenté :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= \boldsymbol{cx} - \sum_{i=1}^{m} M x_{ai} \\ \text{sous contraintes} &\quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ix}_a = \boldsymbol{b} \\ \text{et} &\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{x}_a \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Dans ce cas, la solution réalisable de base initiale est $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b}$. La méthode du "big M" consiste à choisir M suffisamment grand pour que toutes les variables artificielles sortent de la base (c'est-à-dire $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{0}$). On obtient ainsi la solution optimale au problème (5.4) si une telle solution existe.

Mentionnons que dans la formulation du problème (5.38), nous avons ajouté m variables artificielles, ce qui n'est pas toujours nécessaire. En effet, il arrive que la matrice $\boldsymbol{A}$ contienne déjà une partie de la matrice identité. Dans ce cas, il suffit d'ajouter les vecteurs artificiels $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{e}_i$ qui complètent la matrice identité.

Exemple 5.9 *Transformons le problème de programmation linéaire suivant afin de pouvoir lui appliquer la méthode du "big M".*

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } z &= -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ \text{sous contraintes} &\quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -5 \\ &\quad x_1 + 4x_2 + x_4 = 7 \\ &\quad 8x_1 - 7x_2 \geq 10 \\ \text{et} &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Après avoir multiplié la première contrainte par -1 (ce qui inverse l'inégalité) et ajouté les variables d'écart, les contraintes s'écrivent sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

où x_5 et x_6 sont des variables d'écart. Dans la matrice $\boldsymbol{A}$, les colonnes 3 et 4 forment les deux premières colonnes de la matrice identité. Il suffit donc d'ajouter une variable artificielle à la troisième contrainte pour qu'apparaisse la matrice identité d'ordre (3×3). Il faut en outre transformer le problème de minimisation en un problème de maximisation. Finalement, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } (-z) & = & 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_{a1} \\ \text{sous contraintes} & & -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 5 \\ & & x_1 + 4x_2 + x_4 = 7 \\ & & 8x_1 - 7x_2 - x_6 + x_{a1} = 10 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{a1} \geq 0 \end{array}$$

Sous forme matricielle, les contraintes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_{a1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_{a1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Cette dernière formulation correspond à celle donnée en (5.38), avec :

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_{a1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

comme solution réalisable de base initiale. Nous pouvons dès lors utiliser la méthode du simplexe pour résoudre ce problème.

Étape 1 Comme nous disposons d'une solution réalisable de base, nous pouvons construire le tableau initial du simplexe (voir tableau 5.5).

	c_j		2	-5	-3	4	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{q}_1$
-3	$\boldsymbol{a}_3$	5	-4	-2	1	0	-1	0	0
4	$\boldsymbol{a}_4$	7	1	4	0	1	0	0	0
$-M$	$\boldsymbol{q}_1$	10	8	-7	0	0	0	-1	1
	$(z_j - c_j)$	$13 - 10M$	$14 - 8M$	$27 + 7M$	0	0	3	M	0

Tableau 5.5 : Tableau initial du simplexe (méthode du "big M")

Les seules valeurs à calculer dans le tableau 5.5 sont z et les $(z_j - c_j)$ pour les variables hors base :

$$\begin{aligned}
z &= c_{B1}x_{B1} + c_{B2}x_{B2} + c_{B3}x_{B3} \\
&= -3(5) + 4(7) - M(10) = 13 - 10M \\
z_1 - c_1 &= c_{B1}y_{11} + c_{B2}y_{21} + c_{B3}y_{31} - c_1 = 14 - 8M \\
z_2 - c_2 &= c_{B1}y_{12} + c_{B2}y_{22} + c_{B3}y_{32} - c_2 = 27 + 7M \\
z_5 - c_5 &= c_{B1}y_{15} + c_{B2}y_{25} + c_{B3}y_{35} - c_5 = 3 \\
z_6 - c_6 &= c_{B1}y_{16} + c_{B2}y_{26} + c_{B3}y_{36} - c_6 = M
\end{aligned}$$

Passons à l'étape 2 de la méthode du simplexe.

Étape 2 Dans le tableau 5.5, puisque M est considéré comme suffisamment grand, seul $z_1 - c_1 = 14 - 8M$ est négatif. Nous passons à l'étape 3.

Étape 3 Le vecteur $\boldsymbol{y}_1$ situé au-dessus de $(z_1 - c_1)$ possède des éléments positifs. Par conséquent, la valeur de la fonction objectif peut être améliorée et le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ entre dans la base $(k = 1)$. Passons à l'étape 4.

Étape 4 Examinons les rapports x_{Bi}/y_{i1} avec $y_{i1} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x_{B2}}{y_{21}} &= \frac{7}{1} = 7 \\ \frac{x_{B3}}{y_{31}} &= \frac{10}{8} = 1,25 \end{aligned}$$

Le plus petit rapport est 1,25 ; il correspond à x_{B3}/y_{31}. Ainsi $r = 3$ et le vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_1$ sort de la base. Passons à l'étape 5.

Étape 5 Sans entrer dans le détail des calculs, construisons le nouveau tableau du simplexe dont les résultats figurent dans le tableau 5.6.

	c_j		2	-5	-3	4	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{q}_1$
-3	$\boldsymbol{a}_3$	10	0	-5.5	1	0	-1	-0.5	0.5
4	$\boldsymbol{a}_4$	5.75	0	4.875	0	1	0	0.125	-0.125
2	$\boldsymbol{a}_1$	1.25	1	-0.875	0	0	0	-0.125	0.125
	$(z_j - c_j)$	-4.5	0	39.25	0	0	3	1.75	$M - 1.75$

Tableau 5.6 : Tableau du simplexe après la première itération (méthode du "big M")

Puisque dans le tableau 5.6 il n'y a plus de $(z_j - c_j)$ négatifs, nous passons à l'étape 6.

Étape 6 La solution obtenue dans le tableau 5.6 est optimale puisque le vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_1$ n'est plus dans la base. Cette solution est donnée par :

$$x_1 = 1,25$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 10$$
$$x_4 = 5,75$$

Il faut inverser le signe de la valeur de la fonction objectif puisque l'on a maximisé $(-z)$. Ainsi la valeur optimale de la fonction objectif à minimiser : Minimiser $z = -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4$, vaut 4,5.

L'exemple 5.8 nous a permis, à l'aide de la méthode du "big M", de trouver la solution optimale du problème initial en introduisant une va-riable artificielle. Dans cet exemple, après une itération, tous les $(z_j - c_j)$ sont positifs ou nuls et le vecteur artificiel ne se trouve plus dans la base (et donc $x_{a1} = 0$) ; lorsque toutes les variables artificielles sont nulles et que la condition d'optimalité $(z_j - c_j) \geq 0$, $\forall j \in J$ est satisfaite, la solution obtenue est la solution optimale du problème original. Lorsque la condition d'optimalité est satisfaite mais qu'une ou plusieurs variables artificielles se trouvent dans la base avec des valeurs positives, le problème original n'a pas de solution. Illustrons ce dernier cas dans l'exemple suivant.

Exemple 5.10 *Examinons comment fonctionne la méthode du "big M" sur le problème de programmation linéaire suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & & 2x_1 - 3x_2 = 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Après avoir ajouté une variable d'écart à la première contrainte, nous obtenons sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Nous voyons que le vecteur $\boldsymbol{e}_1$, qui est la première colonne de la matrice identité apparaît dans la matrice $\boldsymbol{A}$. Nous devons donc ajouter un vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{e}_2$ dont la variable correspondante est x_{a1}. Le prix associé à x_{a1} est $c_{a1} = -M$. Le programme linéaire augmenté est alors :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 - Mx_{a1} \\ \text{sous contraintes } & \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ & \quad 2x_1 - 3x_2 + x_{a1} = 12 \\ \text{et } & \quad x_1, x_2, x_3, x_{a1} \geq 0 \end{aligned}$$

Le tableau 5.7 représente le tableau initial du simplexe.

	c_j		3	2	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_3$	6	3	4	1	0
$-M$	$\boldsymbol{q}_1$	12	2	-3	0	1
	$(z_j - c_j)$	$-12M$	$-2M - 3$	$3M - 2$	0	0

Tableau 5.7 : Tableau initial du simplexe (méthode du “big M”)

Le tableau 5.7 nous apprend que seul $z_1 - c_1 = -2M - 3$ est négatif.

C’est donc le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ qui entre dans la base. Le vecteur qui sort de la base est le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ puisqu’il correspond au plus petit rapport x_{Bi}/y_{i1}, $y_{i1} > 0$. Établissons le nouveau tableau du simplexe en échangeant $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_3$. Les résultats figurent dans le tableau 5.8.

	c_j		3	2	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{q}_1$
3	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	1.33	0.33	0
$-M$	$\boldsymbol{q}_1$	8	0	-5.67	-0.67	1
	$(z_j - c_j)$	$6 - 8M$	0	$5.67M + 2$	$0.67M + 1$	0

Tableau 5.8 : Tableau du simplexe après une itération

On voit dans le tableau 5.8 que $(z_j - c_j) \geq 0$, $\forall j \in J$.

Ainsi le critère d'optimalité est satisfait. Cependant, le vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_1$ se trouve encore dans la base et la variable artificielle correspondante $x_{a1} = 8$ est positive. Cette situation démontre qu'il n'existe pas de solution réalisable pour le problème initial. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre les contraintes du problème initial et de vérifier qu'elles ne peuvent pas être satisfaites simultanément. Outre les contraintes de non-négativité, nous avons les deux contraintes : $3x_1 + 4x_2 \leq 6$ et $2x_1 - 3x_2 = 12$. Tirons x_1 de la deuxième contrainte : $x_1 = 6 + \frac{3}{2}x_2$. En remplaçant cette deuxième expression dans la première contrainte, nous trouvons :

$$\begin{aligned} 3\left(6 + \frac{3}{2}x_2\right) + 4x_2 &\leq 6 \\ 18 + \frac{9}{2}x_2 + 4x_2 &\leq 6 \\ \frac{17}{2}x_2 &\leq -12 \\ x_2 &\leq -\frac{24}{17} \end{aligned}$$

Par conséquent, la contrainte de non-négativité de x_2 est violée ! Pour terminer ce paragraphe, traitons avec la méthode du "big M", un problème dans lequel la solution optimale n'est pas unique.

Exemple 5.11 *Soit le problème de programmation linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Transformons ce problème sous la forme adéquate pour la méthode du "big M" en introduisant les variables d'écart et une variable artificielle :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_{a1} \\ \text{sous contraintes} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + x_2 - x_4 + x_{a1} = 5 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{a1} \geq 0 \end{aligned}$$

Établissons le tableau initial du simplexe (tableau 5.9).

	c_j		2	1	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_3$	8	2	1	1	0	0
$-M$	$\boldsymbol{q}_1$	5	1	1	0	-1	1
	$(z_j - c_j)$	$-5M$	$-M-2$	$-M-1$	0	M	0

Tableau 5.9 : Tableau initial du simplexe

Dans le tableau 5.9, la plus petite valeur $(z_j - c_j)$ négative pour les vecteurs hors base est $-M-2$ et correspond au vecteur $\boldsymbol{a}_1$ qui entre dans la base. Le vecteur qui sort de la base est le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ qui correspond au plus petit rapport x_{Bi}/y_{i1}, $i = 1, 2$. Nous pouvons donc établir le nouveau tableau 5.10 dans lequel le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ remplace le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ dans la base.

	c_j		2	1	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$
2	$\boldsymbol{a}_1$	4	1	1/2	1/2	0	0
$-M$	$\boldsymbol{q}_1$	1	0	1/2	$-1/2$	-1	1
	$(z_j - c_j)$	$8-M$	0	$-M/2$	$1+M/2$	M	0

Tableau 5.10 : Tableau du simplexe après une itération

Dans le tableau 5.10, $(z_2 - c_2) = -M/2$ est négatif. Le vecteur qui entre dans la base est donc le vecteur $\boldsymbol{a}_2$. Le vecteur qui en sort est le vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_1$, puisqu'il correspond au plus petit rapport x_{Bi}/y_{i2}, $i = 1, 2$. Le nouveau tableau du simplexe est donné dans le tableau 5.11.

	c_j		2	1	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$
2	$\boldsymbol{a}_1$	3	1	0	1	1	-1
1	$\boldsymbol{a}_2$	2	0	1	-1	-2	2
	$(z_j - c_j)$	8	0	0	1	0	M

Tableau 5.11 : Tableau du simplexe après deux itérations

Dans le tableau 5.11, puisque le critère d'optimalité $(z_j - c_j) \geq 0$, $\forall j \in J$ est satisfait, la solution $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$ est une solution optimale. La valeur optimale de la fonction objectif est $z = 8$.

Cependant, il existe une valeur de $(z_j - c_j)$ qui est nulle pour un vecteur hors base, notamment $z_4 - c_4 = 0$. Dans ce cas, la solution optimale trouvée n'est pas unique. Pour connaître les autres solutions optimales (points extrêmes), il suffit de poursuivre la procédure du simplexe en faisant entrer le vecteur correspondant dans la base, c'est-à-dire $\boldsymbol{a}_4$ dans notre cas. Le vecteur qui doit sortir de la base est $\boldsymbol{a}_1$ puisque seul le rapport $x_{B1}/y_{14} = 3$ est à prendre en compte ($y_{24} = -2$ étant négatif). On obtient ainsi le tableau 5.12.

	c_j		2	1	0	0	$-M$
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	3	1	0	1	1	-1
1	$\boldsymbol{a}_2$	8	2	1	1	0	0
	$(z_j - c_j)$	8	0	0	1	0	M

Tableau 5.12 : Tableau du simplexe pour trouver une autre solution optimale

Dans le tableau 5.12, la nouvelle solution optimale est $x_1 = 0$ et $x_2 = 8$. La valeur de la fonction objectif est évidemment la même, c'est-à-dire $z = 8$.

Notons qu'ici encore, il existe une valeur de $(z_j - c_j)$ qui est nulle pour une variable hors base, notamment $z_1 - c_1 = 0$. On pourrait continuer à appliquer la procédure du simplexe en introduisant $\boldsymbol{a}_1$ dans la base. Dans ce cas, les rapports x_{Bi}/y_{i1} sont $x_{B1}/y_{11} = 3$ et $x_{B2}/y_{21} = 4$. Le plus petit rapport est x_{B1}/y_{11} et correspond au vecteur $\boldsymbol{a}_4$ qui doit sortir de la base. Or, en faisant entrer $\boldsymbol{a}_1$ dans la base à la place de $\boldsymbol{a}_4$, on retombe sur le même tableau que celui présenté dans le tableau 5.11. Il est donc inutile de continuer la procédure du simplexe puisque toutes les solutions optimales correspondant aux points extrêmes de la région réalisable ont été trouvées.

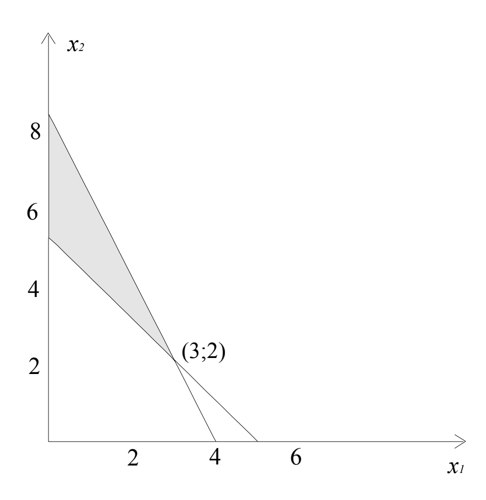


Figure 5.3 : Solutions optimales obtenues par la méthode du simplexe

La figure 5.3 illustre les deux solutions optimales trouvées avec la méthode du "big M" en utilisant la procédure du simplexe. Remarquons que seul un nombre fini de solutions optimales sont fournies par cette méthode alors qu'en réalité il en existe une infinité puisque tous les points situés sur le segment de droite reliant les deux solutions optimales trouvées sont également des solutions optimales.

5.8 La méthode des deux phases

Nous avons vu, dans la méthode du "big M", qu'utiliser $(-M)$ comme coefficient de la fonction objectif pour les variables artificielles permettait de sortir les variables artificielles de la base et donc de les annuler. Cependant, cette méthode pose certains problèmes, notamment lorsque le programme

linéaire est résolu par ordinateur. Contrairement aux calculs à la main, le recours à un ordinateur nécessite en effet le choix d'une valeur numérique pour M. Cette valeur doit être beaucoup plus grande que n'importe quel autre coefficient de la fonction objectif. Si M est trop petit, on peut trouver une solution avec une variable artificielle positive dans la base, ce qui indique un problème non réalisable, alors qu'en réalité il est tout à fait réalisable. D'autre part, si M est trop grand, les valeurs $(z_j - c_j)$ qui sont de la forme $\alpha M + \beta$ seront dominées par M et les erreurs d'arrondis risquent d'avoir un effet non-négligeable sur la solution. De plus, si α est très petit, alors β n'est plus négligeable par rapport à αM, ce qui entraîne également un risque de conclusion erronée.

Nous allons donc présenter une autre méthode, appelée **méthode des deux phases**, qui permet d'éviter les problèmes liés à la méthode du "big M".

Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à résoudre un problème de programmation linéaire en deux parties.

La première partie, appelée **phase I**, consiste à annuler toutes les variables artificielles en utilisant une fonction objectif artificielle. Si l'on ne peut pas annuler toutes les variables, alors le problème n'est pas réalisable.

La **phase II** consiste à remplacer la fonction objectif artificielle de la phase I par la vraie fonction objectif à maximiser. On utilise alors la solution réalisable de base obtenue à la fin de la phase I. Deux cas peuvent se présenter en ce qui concerne cette solution réalisable de base.

Premier cas La solution réalisable de base obtenue à la fin de la phase I ne contient plus de variables artificielles. Dans ce cas, on utilise simplement l'algorithme du simplexe décrit précédemment pour obtenir la solution optimale.

Deuxième cas Une ou plusieurs variables artificielles (nulles) font partie de cette solution réalisable de base. L'algorithme du simplexe peut également être utilisé mais il faut s'assurer que ces variables artificielles ne deviennent jamais positives. Pour éviter ce problème, le critère de sortie de la base doit être modifié en conséquence. Après avoir déterminé le vecteur $\boldsymbol{a}_k$ à faire entrer dans la base, il faut examiner les valeurs y_{ik} qui correspondent aux vecteurs artificiels.

Si $y_{ik} \leq 0$ pour tous les indices i correspondant aux vecteurs artificiels et $y_{ik} > 0$ pour au moins un indice i, le critère usuel de sortie de la base

ne sélectionnerait aucun vecteur artificiel. Ce serait donc un vrai vecteur $\boldsymbol{b}_r$ qui serait éliminé. Si $x_{Br} > 0$, alors les valeurs des variables artificielles avec $y_{ik} < 0$ deviendraient positives puisque :

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} x_{Br} = -\frac{y_{ik}}{y_{rk}} x_{Br} > 0$$

Dans une situation de ce type, au lieu d'utiliser le critère usuel de sortie de la base, on fait sortir un vecteur artificiel avec un $y_{ik} < 0$. Dans ce cas, les nouvelles valeurs de la solution réalisable de base restent inchangées puisque $x_{Br} = 0$. La nouvelle valeur de la fonction objectif n'est pas strictement améliorée mais reste constante, $\hat{z} = z$, pour cette itération.

La méthode des deux phases et les étapes de chaque phase sont décrites ci-dessous.

- **Phase I**

Cette phase consiste à construire une fonction objectif artificielle en attribuant à chaque variable artificielle un prix de -1 à la place de $-M$ et un prix nul à toutes les autres variables. Il s'agit donc de maximiser la fonction objectif suivante :

$$\text{Maximiser } z^a = -x_{a1} - x_{a2} - \ldots - x_{as}$$

où l'indice s indique le nombre de variables artificielles qui ont été rajoutées dans les contraintes. Puisque les variables artificielles x_{ai} sont non-négatives, la fonction objectif artificielle est toujours non-positive et atteint son maximum 0 lorsque chaque variable artificielle est nulle.

Les étapes de la phase I sont les suivantes :

Étape 1 Transformer au besoin le problème de programmation linéaire sous forme standard en ajoutant les variables d'écart et les variables artificielles nécessaires.

Étape 2 Construire la fonction objectif artificielle z^a en changeant les coefficients de la fonction objectif originale de la manière suivante :

(a) les coefficients des variables artificielles valent -1.

(b) les coefficients des autres variables sont nuls.

Étape 3 Résoudre le problème établi dans les deux étapes précédentes avec la méthode usuelle du simplexe.

On s'arrête à la phase I dans deux cas :

(a) La valeur de z^a vaut 0 (même s'il reste certains $(z_j - c_j)$ négatifs). On passe alors à l'étape 1 de la phase II.

(b) Le critère d'optimalité $(z_j - c_j) \geq 0$, $\forall j \in J$ est satisfait mais il reste dans la base des variables artificielles avec des valeurs positives (ainsi $z^a < 0$). Dans ce cas, le problème original n'a pas de solution réalisable et l'on s'arrête.

Voyons à présent les étapes de la phase II dont le but est de trouver une solution optimale au problème original.

- **Phase II**

Étape 1 Remplacer la fonction objectif artificielle par la fonction objectif originale, y compris les variables d'écart en donnant leur prix réel aux vraies variables et un prix zéro à toute variable artificielle qui peut apparaître dans la base à un niveau zéro. Les colonnes des vecteurs artificiels qui ne sont pas dans la base peuvent être éliminées du tableau car elles ne seront plus candidates pour y entrer.

Étape 2 Le premier tableau de la phase II et le dernier tableau de la phase I sont identiques à l'exception des coefficients de la fonction objectif et des valeurs $(z_j - c_j)$ qui doivent être recalculées.

Étape 3 S'il n'y a plus de variables artificielles dans la base à la fin de la phase I, on applique la méthode usuelle du simplexe. Sinon, on passe à l'étape 4.

Étape 4 Pour éviter que les variables artificielles de la base ne deviennent positives, il faut examiner les valeurs y_{ik} (la colonne correspondant au vecteur $\boldsymbol{a}_k$ qui entre dans la base) pour chaque variable artificielle. Si ces valeurs sont telles que $y_{ik} \leq 0$ pour tous les indices i correspondant aux vecteurs

artificiels et $y_{ik} > 0$ pour au moins un indice i, on fait sortir de la base un vecteur artificiel avec un $y_{ik} < 0$. Sinon on utilise le critère usuel de sortie.

Les exemples suivants illustrent respectivement les trois cas qui peuvent se présenter à la fin de la phase I, c'est-à-dire :

1. $z^a = 0$ et il ne reste plus de vecteurs artificiels dans la base.

2. $z^a = 0$ et il reste un ou plusieurs vecteurs artificiels dans la base.

3. $z^a < 0$; dans ce cas, il n'existe pas de solution réalisable.

Exemple 5.12 *Soit le problème suivant à résoudre avec la méthode des deux phases :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 8 \\ & & 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ & & 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 19 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- **Phase I**

Étape 1 Transformons ce problème sous forme standard en ajoutant une variable d'écart aux deux premières inéquations. Pour former une matrice identité, il faut encore ajouter une variable artificielle à la troisième équation.

Les contraintes transformées sont donc :

$$\begin{array}{rrcr} & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 8 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 & = & 5 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{a1} & = & 19 \\ \text{et} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{a1} & \geq & 0 \end{array}$$

Étape 2 La fonction objectif artificielle à maximiser est $z^a = -x_{a1}$ puisque les coefficients des autres variables sont nuls.

Étape 3 Construisons le premier tableau de la phase I et appliquons la méthode usuelle du simplexe.

	c_j		0	0	0	0	0	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	8	1	4	−3	1	0	0
0	$\boldsymbol{a}_5$	5	2	−1	0	0	1	0
−1	$\boldsymbol{q}_1$	19	5	2	−1	0	0	1
	$(z_j - c_j)$	−19	−5	−2	1	0	0	0

Tableau 5.13 : Tableau 1 de la phase I

$z^a = -19$. Les critères usuels d'entrée et de sortie de la base indiquent que le vecteur $\boldsymbol{a}_1$ remplace le vecteur $\boldsymbol{a}_5$ dans la base. Nous calculons donc un deuxième tableau.

	c_j		0	0	0	0	0	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	11/2	0	9/2	−3	1	−1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_1$	5/2	1	−1/2	0	0	1/2	0
−1	$\boldsymbol{q}_1$	13/2	0	9/2	−1	0	−5/2	1
	$(z_j - c_j)$	−13/2	0	−9/2	1	0	5/2	0

Tableau 5.14 : Tableau 2 de la phase I

Dans le tableau 2 de la phase I, $z^a = -13/2$. Nous calculons un nouveau tableau en remplaçant $\boldsymbol{a}_4$ par $\boldsymbol{a}_2$ dans la base.

	c_j		0	0	0	0	0	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_2$	11/9	0	1	−6/9	2/9	−1/9	0
0	$\boldsymbol{a}_1$	56/18	1	0	−6/18	2/18	8/18	0
−1	$\boldsymbol{q}_1$	1	0	0	2	−1	−2	1
	$(z_j - c_j)$	−1	0	0	−2	1	2	0

Tableau 5.15 : Tableau 3 de la phase I

Dans le tableau 3 de la phase 1, nous voyons que $z^a = -1$ et que $\boldsymbol{a}_3$ remplace $\boldsymbol{q}_1$ dans la base. Nous calculons donc un quatrième tableau.

	c_j		0	0	0	0	0	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_2$	28/18	0	1	0	−2/18	−14/18	6/18
0	$\boldsymbol{a}_1$	118/36	1	0	0	−2/36	4/36	6/36
0	$\boldsymbol{a}_3$	1/2	0	0	1	−1/2	−1	1/2
	$(z_j - c_j)$	0	0	0	0	0	0	1

Tableau 5.16 : Tableau 4 de la phase I

Le tableau 4 de la phase I nous montre que cette phase est terminée puisque $z^a = 0$. De plus, il n'y a plus de vecteur artificiel dans la base. Nous pouvons donc passer à l'étape 1 de la phase II.

- **Phase 2**

Étape 1 La fonction objectif à maximiser est la fonction objectif originale, c'est-à-dire :

$$\text{Maximiser } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

La colonne correspondant au vecteur artificiel $\boldsymbol{q}_1$ peut être éliminée du nouveau tableau.

Étape 2 Construisons le premier tableau de la phase II à partir du dernier tableau de la phase I en remplaçant les coefficients c_j par les valeurs originales, puis en calculant les $(z_j - c_j)$.

	c_j		2	3	5	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
3	$\boldsymbol{a}_2$	28/18	0	1	0	−2/18	−14/18
2	$\boldsymbol{a}_1$	118/36	1	0	0	−2/36	4/36
5	$\boldsymbol{a}_3$	1/2	0	0	1	−1/2	−1
	$(z_j - c_j)$	494/36	0	0	0	−106/36	−256/36

Tableau 5.17 : Tableau 1 de la phase II

	c_j		2	3	5	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
3	$\boldsymbol{a}_2$	49/2	7	1	0	−1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_5$	59/2	9	0	0	−1/2	1
5	$\boldsymbol{a}_3$	30	9	0	1	−1	0
	$(z_j - c_j)$	447/2	64	0	0	−3/2	0

Tableau 5.18 : Tableau 2 de la phase II

Étape 3 Comme il n'y a plus de vecteurs artificiels dans le tableau 1 de la phase II, nous pouvons appliquer l'algorithme usuel du simplexe. D'après les critères usuels, le vecteur qui devrait entrer dans la base est le vecteur $\boldsymbol{a}_5$ et celui qui devrait en sortir est le vecteur $\boldsymbol{a}_1$. Cependant, comme toutes les valeurs y_{i4} correspondant à $(z_4 - c_4) = -\frac{106}{36} < 0$ sont négatives, la solution optimale est infinie et la phase II s'arrête à ce stade.

À noter que la solution obtenue dans le tableau 1 de la phase II : $x_1 = \frac{118}{36}$, $x_2 = \frac{28}{18}$ et $x_3 = \frac{1}{2}$ n'est qu'une solution réalisable de base. Il ne s'agit pas de

la solution optimale. On peut d'ailleurs poursuivre l'algorithme du simplexe pour obtenir une plus grande valeur de la fonction objectif, comme l'indique la valeur de z dans le tableau 2 de la phase II.

Dans ce tableau, on voit qu'il n'y a qu'un seul $(z_j - c_j)$ négatif. Le vecteur qui devrait entrer dans la base est le vecteur $\boldsymbol{a}_4$. Cependant, tous les y_{i4} sont négatifs, par conséquent aucun vecteur ne peut sortir de la base ! À ce stade, nous devons interrompre l'algorithme du simplexe et conclure que la solution est infinie.

Exemple 5.13 *Soit le problème suivant à résoudre avec la méthode des deux phases :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & & 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ & & x_3 \leq 2 \\ \text{et} & & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{array}$$

- **Phase I**

Étape 1 Comme il s'agit d'un problème de minimisation, il faut le transformer en un problème de maximisation en inversant le signe des coefficients de la fonction objectif. Cette opération n'intervient que dans la phase II. En revanche, il faut introduire une variable d'écart dans la quatrième contrainte et ajouter trois variables artificielles pour qu'une matrice identité apparaisse dans le tableau 1 de la phase I. Les contraintes s'écrivent alors :

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 + x_{a1} & = & 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_{a2} & = & 4 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_{a3} & = & 10 \\ x_3 + x_4 & = & 2 \\ \text{et } x_1, x_2, x_3, x_4, x_{a1}, x_{a2}, x_{a3} & \geq & 0 \end{array}$$

Étape 2 La fonction objectif artificielle s'écrit :

$$\text{Maximiser } z^a = -x_{a1} - x_{a2} - x_{a3}$$

Étape 3 Nous construisons le tableau 1 de la phase I et appliquons l'algorithme usuel du simplexe.

	c_j		0	0	0	0	−1	−1	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$
−1	$\boldsymbol{q}_1$	6	1	1	1	0	1	0	0
−1	$\boldsymbol{q}_2$	4	−1	1	2	0	0	1	0
−1	$\boldsymbol{q}_3$	10	0	2	3	0	0	0	1
0	$\boldsymbol{a}_4$	2	0	0	1	1	0	0	0
	$(z_j - c_j)$	−20	0	−4	−6	0	0	0	0

Tableau 5.19 : Tableau 1 de la phase I

Le critère d'entrée indique que le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ entre dans la base. Le critère de sortie indique deux possibilités pour sortir un vecteur de la base : $\boldsymbol{q}_2$ ou $\boldsymbol{a}_4$ puisqu'ils ont tous deux le plus petit rapport $(4/2 = 2/1 = 2)$.

Le but de la phase I étant de faire sortir les vecteurs artificiels de la base, notre choix portera sur $\boldsymbol{q}_2$. Nous construisons le tableau 2 de la phase I.

	c_j		0	0	0	0	−1	−1	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$
−1	$\boldsymbol{q}_1$	4	3/2	1/2	0	0	1	−1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	−1/2	1/2	1	0	0	1/2	0
−1	$\boldsymbol{q}_3$	4	3/2	1/2	0	0	0	−3/2	1
0	$\boldsymbol{a}_4$	0	1/2	−1/2	0	1	0	−1/2	0
	$(z_j - c_j)$	−8	−3	−1	0	0	0	3	0

Tableau 5.20 : Tableau 2 de la phase I

Le tableau 2 de la phase I indique que $z^a = -8$. On peut faire entrer $\boldsymbol{a}_1$ dans la base. Le vecteur $\boldsymbol{a}_4$ sort de la base puisqu'il correspond au plus petit rapport x_{Bi}/y_{i1}, $y_{i1} > 0$, c'est-à-dire $\frac{0}{1/2} = 0$.

À noter que puisque $x_{B4} = x_4 = 0$, la valeur de la fonction objectif dans le tableau suivant reste constante, comme l'indique le tableau 3 de la phase I.

	c_j		0	0	0	0	−1	−1	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$
−1	$\boldsymbol{q}_1$	4	0	2	0	−3	1	1	0
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	0	0	1	1	0	0	0
−1	$\boldsymbol{q}_3$	4	0	2	0	−3	0	0	1
0	$\boldsymbol{a}_1$	0	1	−1	0	2	0	−1	0
	$(z_j - c_j)$	−8	0	−4	0	6	0	0	0

Tableau 5.21 : Tableau 3 de la phase I

Dans le tableau 3 de la phase I, nous avons $z^a = -8$. Le vecteur qui entre dans la base est le vecteur $\boldsymbol{a}_2$. Il y a deux vecteurs candidats pour sortir de la base : $\boldsymbol{q}_1$ et $\boldsymbol{q}_3$. Nous choisissons arbitrairement de sortir $\boldsymbol{q}_1$ de la base et calculons un nouveau tableau.

	c_j		0	0	0	0	−1	−1	−1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$
0	$\boldsymbol{a}_2$	2	0	1	0	−3/2	1/2	1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	0	0	1	1	0	0	0
−1	$\boldsymbol{q}_3$	0	0	0	0	0	−1	−1	1
0	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	0	1/2	1/2	−1/2	0
	$(z_j - c_j)$	0	0	0	0	0	2	2	0

Tableau 5.22 : Tableau 4 de la phase I

Puisque dans le tableau 4 de la phase I $z^a = 0$, la phase I est terminée. Notons qu'il reste un vecteur artificiel ($\boldsymbol{q}_3$) dans la base à un niveau 0. Il faudra donc s'assurer dans la phase II que la variable correspondante ne devienne pas positive. Nous pouvons passer à l'étape 1 de la phase II.

- **Phase II**

Étape 1 Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, il faut le transformer en un problème de maximisation. La fonction objectif à maximiser est donc :

$$\text{Maximiser} \quad (-z) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$

Les coefficients de la variable d'écart x_4 et de la variable artificielle x_{a3} dans la base sont nuls. De plus, nous pouvons éliminer du tableau les vecteurs artificiels $\boldsymbol{q}_1$ et $\boldsymbol{q}_2$ qui ne sont plus dans la base.

Étape 2 Établissons le tableau 1 de la phase II.

	c_j		2	−3	5	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{q}_3$
−3	$\boldsymbol{a}_2$	2	0	1	0	−3/2	0
5	$\boldsymbol{a}_3$	2	0	0	1	1	0
0	$\boldsymbol{q}_3$	0	0	0	0	0	1
2	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	0	1/2	0
	$(z_j - c_j)$	8	0	0	0	21/2	0

Tableau 5.23 : Tableau 1 de la phase II

Le tableau 1 de la phase II fournit la solution optimale puisque la seule valeur de $(z_j - c_j)$ pour un vecteur hors base est strictement positive. À noter que dans ce cas, à la fin de la phase II, il reste un vecteur artificiel dans la base à un niveau zéro.

La solution optimale est donnée par $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 2$. La valeur de la fonction objectif vaut $z = -8$ (car il s'agit d'une minimisation).

Exemple 5.14 *Soit le programme linéaire suivant à résoudre :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Sans détailler chaque étape, construisons le tableau 1 de la phase I.

	c_j		0	0	0	0	0	0	-1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	4	1	-1	1	1	0	0	0
0	$\boldsymbol{a}_5$	6	2	2	3	0	1	0	0
-1	$\boldsymbol{q}_1$	12	3	1	4	0	0	-1	1
	$(z_j - c_j)$	-12	-3	-1	-4	0	0	1	0

Tableau 5.24 : Tableau 1 de la phase I

Dans le tableau 1 de la phase I, nous voyons que le vecteur $\boldsymbol{a}_3$ entre dans la base et que le vecteur $\boldsymbol{a}_5$ en sort.

Nous construisons donc le tableau 2 de la phase I.

	c_j		0	0	0	0	0	0	-1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	2	$1/3$	$-5/3$	0	1	$-1/3$	0	0
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	$2/3$	$2/3$	1	0	$1/3$	0	0
-1	$\boldsymbol{q}_1$	4	$1/3$	$-5/3$	0	0	$-4/3$	-1	1
	$(z_j - c_j)$	-4	$-1/3$	$5/3$	0	0	$4/3$	1	0

Tableau 5.25 : Tableau 2 de la phase I

La phase I se poursuit : on fait entrer $\boldsymbol{a}_1$ dans la base et on en fait sortir $\boldsymbol{a}_3$. Nous construisons donc le tableau 3 de la phase I.

	c_j		0	0	0	0	0	0	-1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_4$	1	0	-2	$-1/2$	1	$-1/2$	0	0
0	$\boldsymbol{a}_1$	3	1	1	$3/2$	0	$1/2$	0	0
-1	$\boldsymbol{q}_1$	3	0	-2	$-1/2$	0	$-3/2$	-1	1
	$(z_j - c_j)$	-3	0	2	$1/2$	0	$3/2$	1	0

Tableau 5.26 : Tableau 3 de la phase I

Dans le tableau 3 de la phase I, nous constatons qu'il n'y a plus de $(z_j - c_j)$ négatifs. Par conséquent, la phase I s'arrête. Or, la valeur de la fonction objectif artificielle équivaut à $z^a = -3$. Puisque cette valeur n'est pas nulle, le problème original n'a pas de solution réalisable. Le fait que $z^a = -3 < 0$ provient de la présence du vecteur artificiel à un niveau positif dans la base.

5.9 Utilisation du Solveur Excel

On peut résoudre les problèmes de programmation linéaire à l'aide de l'outil Solveur du logiciel Excel (pour une introduction à l'utilisation du Solveur, voir chapitre 2).

Exemple 5.15 *Reprenons l'exemple 5.8. que nous avons déjà traité.*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \textit{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \textit{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Tout d'abord, formulons le problème sur la feuille de calcul Excel.

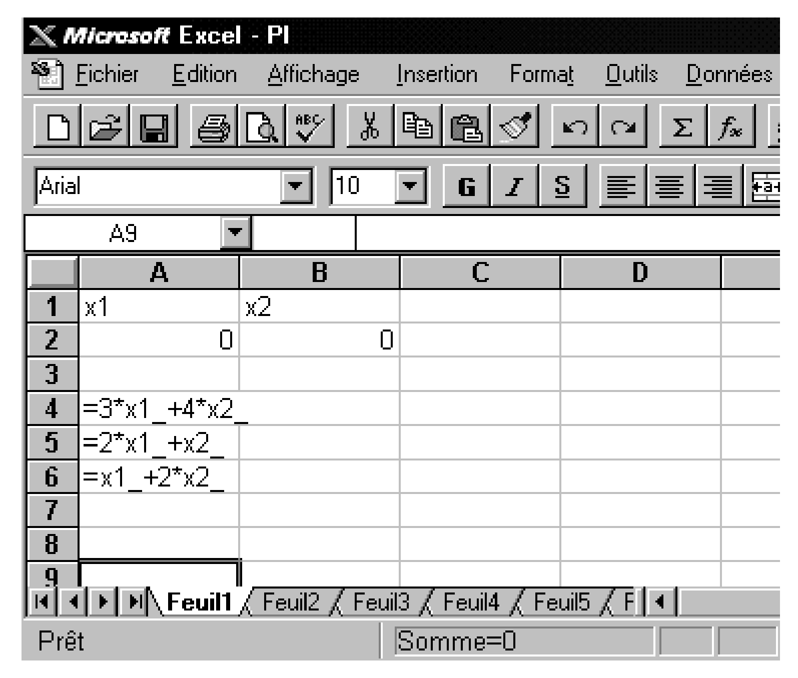


Figure 5.4 : Formulation du problème sur Excel

Sélectionner la cellule contenant la fonction à maximiser, dans notre cas la cellule A4, et choisir **Solveur** dans le menu **Outil**. Choisir les variables et préciser les contraintes.

Figure 5.5 : Paramètres du **Solveur** pour ce problème

Il est toutefois nécessaire de préciser quelques options, en particulier, le fait que le modèle est supposé linéaire. Il est par ailleurs judicieux de demander l'affichage des étapes intermédiaires.

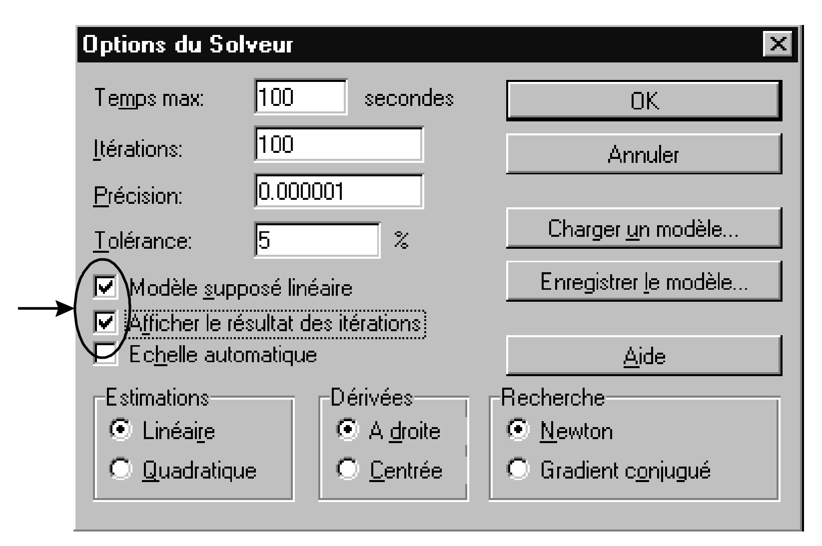


Figure 5.6 : Boîte de dialogue d'option

Le **Solveur** est maintenant prêt. En partant de $x_1 = x_2 = 0$, il trouve un premier résultat intermédiaire $x_1 = 0$ et $x_2 = 6$. Puis il obtient la solution $x_1 = x_2 = 4$.

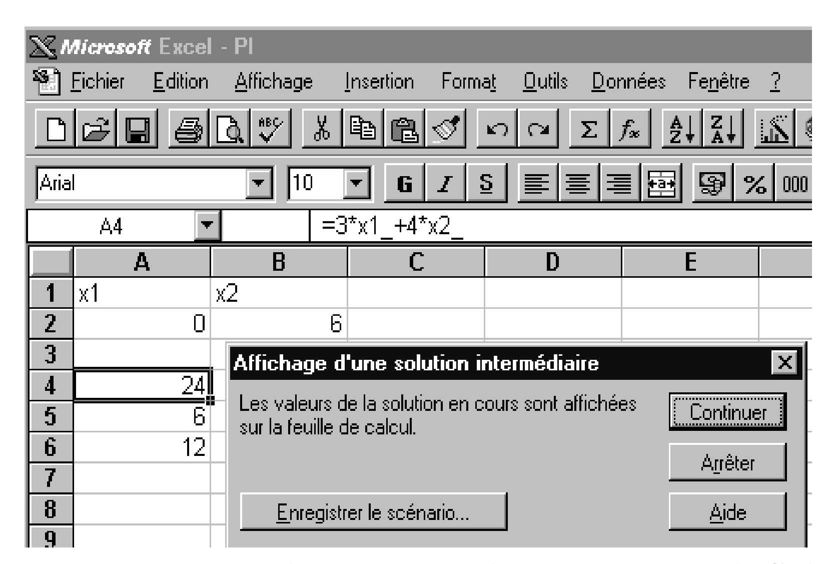


Figure 5.7 : Première solution intermédiaire trouvée par le **Solveur**

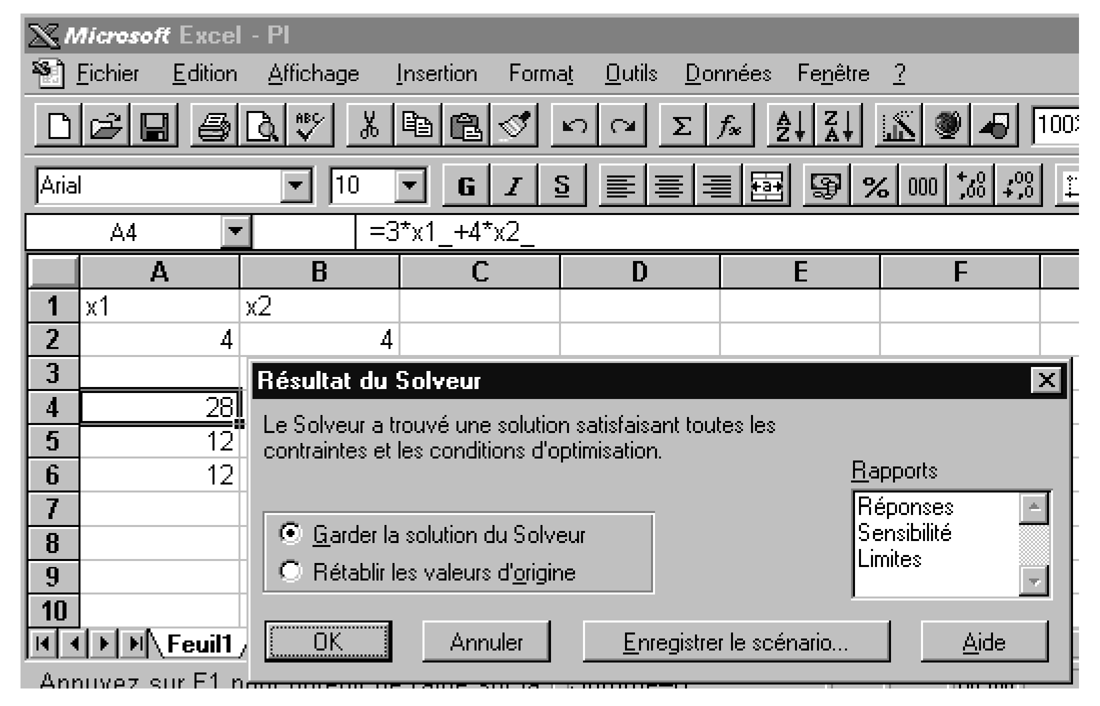


Figure 5.8 : Solution finale proposée par le **Solveur**

5.10 Exercices

1. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Maximiser } z & = & x_1 + x_2 \\
\text{sous contraintes} & & -5x_1 + 6x_2 \leq 25 \\
 & & 9x_1 - 2x_2 \leq 43 \\
 & & x_1 + x_2 \geq 8 \\
 & & 3x_1 + x_2 \geq 8 \\
\text{et} & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

2. Dans une exploitation agricole, on élève des vaches et des moutons. Les étables peuvent contenir un maximum de 50 vaches et 200 moutons. De plus, 72 arpents de pâturages sont disponibles. On a besoin de 1 arpent par vache et de 0,2 arpent par mouton. Pour s'occuper du bétail, on dispose de 10 000 heures de travail par année. On estime qu'une vache

nécessite 150 heures de travail par année et un mouton 25 heures. Le gain annuel net s'élève à 250 CHF par vache et à 45 CHF par mouton.

Combien doit-on élever de vaches et de moutons pour que le gain net soit maximal ?

3. On nourrit des lapins exclusivement de carottes et de pommes de terre. Une mesure de carottes fournit 1 kcal, 4 mg de vitamine B et 3 mg de vitamine A. Une mesure de pommes de terre fournit 2 kcal, 3 mg de vitamine B et 1 mg de vitamine A. Les besoins du lapin sont d'au moins 2 kcal, 6 mg de vitamine B et 3 mg de vitamine A. Une mesure de carottes coûte autant que deux mesures de pommes de terre.

   Quel menu coûte le moins cher ?

4. Une usine fabrique les produits P1 et P2. Elle utilise les matières premières M1, M2 et M3, à raison de 2 tonnes de M1, 1 tonne de M2 et 3 tonnes de M3 par unité produite de P1 et de 1 tonne de M1, 3 tonnes de M2 et 4 tonnes de M3 par unité produite de P2. Elle dispose mensuellement de 50 tonnes de M1, 25 tonnes de M2 et 60 tonnes de M3.

   Le bénéfice net est de 5 000 CHF par unité de P1 et de 2 000 CHF par unité de P2.

   Quelle quantité de chacun des deux produits l'entreprise doit-elle fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ?

5. Un industriel doit livrer trois biens A, B et C à raison de 6 unités de A, 11 unités de B et 23 unités de C. Il dispose de deux facteurs de production X1 et X2. L'emploi d'une unité de X1 permet de réaliser une unité de A, une de B et une de C. Une unité de X2 permet de réaliser une unité de A, 2 de B et 5 de C. Le prix du facteur X1 est de 100 CHF l'unité, celui du facteur X2 de 400 CHF.

   Quelle quantité de chaque facteur l'industriel doit-il utiliser pour satisfaire la demande à un coût minimal ?

6. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 5 \\ 2x+3y & \geq & 6 \\ 4x+2y & \geq & 8 \\ x+y & & \text{à minimiser} \end{array}$$

7. Il reste à un droguiste 1 kg de MNA et 2 kg de PCS. En mélangeant convenablement ces deux matières, il peut fabriquer trois produits (X,Y,Z). Les proportions par unité de produit sont de 5 MNA et 1 PCS pour X, 1 MNA et 1 PCS pour Y et 1 MNA et 3 PCS pour Z. Ces produits sont vendus respectivement 10 CHF, 6 CHF et 12 CHF le kg.

   Trouver la production qui maximise la recette.

8. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ & & x_1 + x_2 \leq 25 \\ & & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

9. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 \leq 1000 \\ & & x_2 \leq 500 \\ & & x_3 \leq 1500 \\ & & 3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2250 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

10. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{sous contraintes} & & 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ & & 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ \text{et} & & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

11. Une entreprise fabrique deux types de ceintures A et B. Le type A est de meilleure qualité que le type B. Le bénéfice net est de 2 CHF pour le type A et de 1,50CHF pour le type B. Le temps de fabrication de A est deux fois plus élevée que le temps de fabrication de B. Si toutes les ceintures étaient de type B, l'entreprise pourrait en fabriquer 1 000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 ceintures par jour (type A ou B). Enfin, on dispose de 400 boucles de type A et de 700 boucles de type B chaque jour.

    Quels sont les nombres respectifs de ceintures des deux types à fabriquer chaque jour de manière à maximiser le bénéfice total de l'entreprise ?

12. Dans une usine, on distingue quatre centres de frais : la tôlerie (TO), les constructions en tubes (TU), la serrurerie (S) et la mécanique (M). Les capacités de ces centres de frais sont respectivement de 130, 240, 810 et 180. L'usine produit des colonnes de refroidissement (C) et des réfrigérateurs (R), dont les coefficients techniques sont les suivants :

	C	R
TO	10	10
TU	16	24
S	30	90
M	0	15

    Les marges brutes de ces deux produits sont de 4 800 pour C et 6 000 pour R.

    Quelle est la production la plus avantageuse ?

13. On doit construire X1 maison à 5 étages et X2 maisons à 2 étages sur un terrain marécageux, où la construction des maisons hautes est très onéreuse. On désigne par pers.-mois le travail fourni par une personne pour un mois.

Nb d'étages	Coût	Pers.-mois	Superficie (m^2)	Nb d'occupants par maison
5	600 000	120	800	30
2	200 000	60	600	12
Disponibilité	18 000 000	4 500	42 000	

Comment choisir X1 et X2 de façon à loger le plus de personnes ?

14. Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du “big M” :

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 10x_1 + 30x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ & & x_2 \geq 2 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

15. Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode des deux phases :

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & & -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & & -3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

16. Un mélange doit contenir au moins 15 g de fluore, 20 g de chlore, 10 g d’iode et 25 g de sodium. Il existe sur le marché trois produits qui contiennent ces quatre composants, dans les quantités suivantes (grammes par kg) :

	fluore	chlore	iode	sodium
1	1	1	0,5	1
2	1	2	0,5	3
3	1	1	1	2

Le premier produit coûte 3,50 CHF le kg, le deuxième 6,50 CHF le kg et le troisième 5 CHF le kg.

Quel mélange faut-il faire pour minimiser le coût ?

17. Un négociant en vins veut satisfaire sa clientèle au moindre coût. Il retient comme critère de qualité les deux grandeurs suivantes : son vin devra avoir une teneur en alcool d’au moins 11° et une teneur en sucre d’au moins 70 %. Il dispose de trois crus, dont les teneurs en alcool et en sucre, ainsi que les prix par litre sont donnés dans le tableau suivant :

	alcool(^{o})	sucre (%)	prix/l
1	10	60	2
2	8	40	1
3	14	80	4

Combien coûtera le litre de vin et quelle sera sa composition ?



DANTZIG George B. (né en 1914)

Avec l'invention de la méthode du simplexe en 1947, George B. Dantzig, mathématicien américain, est considéré comme l'un des pères fondateurs de la programmation linéaire.

Son domaine de recherche, outre la programmation linéaire, couvre entre autres, des sciences telles que la programmation mathématique, la prise de décision, les modèles de planification à large échelle. L'impact de son œuvre fut considérable en gestion et en économie et ses méthodes sont toujours d'actualité.

Chapitre 6

Le simplexe révisé

6.1 Introduction

Cette méthode a été mise au point par Dantzig, Orden et Wolfe à la “Rand Corporation” au début des années 1950. Les principes du simplexe révisé sont les mêmes que ceux de la méthode conventionnelle du simplexe. La nouveauté provient du fait que la procédure révisée utilise avec les coefficients originaux, alors que la procédure conventionnelle du simplexe transforme ces coefficients au fur et à mesure des itérations. Il en résulte un gain de place lors du stockage des coefficients dans la mémoire d'un ordinateur et, par conséquent, un gain de temps appréciable. D'autre part, le nombre total d'itération est généralement plus faible avec la méthode du simplexe révisé qu'avec la méthode originale du simplexe.

En fait, il est inutile de transformer tous les $\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{x_B}$ et $z_j - c_j$ à chaque itération. Ils peuvent être calculés facilement si $\boldsymbol{B}^{-1}$ est connu. Dans le simplexe révisé, on ne calcule que $\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$. Seul le $\boldsymbol{y}_i$ du vecteur entrant est calculé à chaque itération.

Le simplexe révisé se présente sous deux formes différentes, selon que l'on ajoute des variables d'écart ou des variables artificielles. Pour la première formulation, nous supposons qu'une matrice identité est présente après l'ajout éventuel de variables d'écart. Si des variables artificielles sont ajoutées, on utilise la seconde formulation qui correspond à la méthode des deux phases.

6.2 Factorisation de l'inverse d'une matrice

La procédure révisée du simplexe découle d'une propriété du calcul matriciel appelée : factorisation de l'inverse (ou forme produit de l'inverse). Soit une matrice:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_p & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

non-singulière dont l'inverse $\boldsymbol{B}^{-1}$ est connue. Supposons que nous devons trouver l'inverse de la matrice

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{p} & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

qui ne diffère de $\boldsymbol{B}$ que par la substitution du vecteur $\boldsymbol{p}$ au vecteur $\boldsymbol{a}_p$. Nous savons, par définition, que tous les vecteurs $\boldsymbol{a}_j$ de $\boldsymbol{B}$ sont linéairement indépendants, puisque $\boldsymbol{B}$ est non-singulière. Le vecteur $\boldsymbol{p}$ peut donc s'exprimer par une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{a}_j$:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{a}_j \tag{6.1}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ existe est que les vecteurs $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{p} & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ soient linéairement indépendants, c'est-à-dire que y_p dans l'équation 6.1 soit différent de zéro, puisque nous savons déjà que les autres sont indépendants. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} = &\ \sum_{j \neq p}^{m} y_j \boldsymbol{a}_j + y_p \boldsymbol{a}_p \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_p = &\ -\frac{1}{y_p} \sum_{j \neq p}^{m} y_j \boldsymbol{a}_j + \frac{1}{y_p} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{a}_p = &\ \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{v}_p \end{aligned}$$

où

$$\boldsymbol{v}'_p = \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{y_p} & -\frac{y_2}{y_p} & \cdots & -\frac{y_{p-1}}{y_p} & \frac{1}{y_p} & -\frac{y_{p+1}}{y_p} & \cdots & -\frac{y_m}{y_p} \end{pmatrix}$$

Il en résulte alors que :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{p-1} & \boldsymbol{v}_p & \boldsymbol{e}_{p+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{E}$$

où $\boldsymbol{e}_i$ désigne le i-ème vecteur unité. On trouve finalement :

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1} \tag{6.2}$$

où

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{y_1}{y_p} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{y_2}{y_p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{y_p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{y_m}{y_p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ce résultat est particulièrement utile dans la procédure du simplexe révisé, puisqu'à chaque itération la base ne différe que par la substitution du vecteur $\boldsymbol{a}_k$ entrant au vecteur $\boldsymbol{a}_j$ sortant.

Exemple 6.1 *Soit la matrice :*

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que la deuxième colonne est remplacée par :

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix}$$

dont nous déduisons

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est alors très facile de calculer :

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.3 Première formulation

Dans cette première forme, la fonction objectif est traitée comme une contrainte. La fonction économique devient alors :

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = 0$$

Le système de m inéquations linéaires à n inconnues devient un système à m+1 inéquations linéaires à $n+1$ inconnues. Le programme linéaire s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & +a_{01}x_1+ & \cdots & +a_{on}x_n & = 0 \\ & a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{array}$$

où $z = x_0$ et $-c_j = a_{0j}$. Sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{a}_0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

On définit une matrice identité $\boldsymbol{B}_1$. La matrice de base contient toujours un vecteur $\boldsymbol{e}_1$, car x_0 est à maximiser, et m vecteurs $\boldsymbol{a}_j$ linéairement indépendants.

Il existe une correspondance entre les matrices de base $\boldsymbol{B}_1$ du système de contraintes ci-dessus et la matrice de base $\boldsymbol{B}$ du système de contraintes $\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$. Il est dès lors utile d'écrire $\boldsymbol{B}_1$ sous une forme partitionnée:

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ étant la matrice de base pour $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

La procédure du simplexe révisé comporte trois étapes.

Étape 1 On calcule l'inverse de la nouvelle base $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ à partir de la précédente base inversée $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\boldsymbol{y}_j^{(1)}$ correspondant au $\begin{bmatrix} -c_j \\ \boldsymbol{a}_j \end{bmatrix}$ dans le tableau associé à la base $\boldsymbol{B}$ est $\boldsymbol{y}_j^{(1)} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{a}_j^{(1)}$. Ainsi:

$$\boldsymbol{y}_j^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_j \\ \boldsymbol{a}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j - c_j \\ \boldsymbol{y}_j \end{bmatrix}$$

C'est la raison pour laquelle la fonction objectif est traitée ici comme une contrainte.

Étape 2 On calcule $z_j - c_j$ pour toutes les variables non incluses dans la base.

Pour trouver $z_j - c_j$ pour tout $\boldsymbol{a}_j$, nous formons le produit scalaire de la première ligne de $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ avec $\boldsymbol{a}_j^{(1)}$.

$$\boldsymbol{x}_B^{(1)} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}$$

$$\boldsymbol{x}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x_B} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_B^{(1)}$ contient comme première composante z, la valeur de la fonction objectif et les $\boldsymbol{x}_{Bi}$ de la solution de base pour $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ correspondant à la matrice $\boldsymbol{B}$. Les règles de calcul sont identiques à celles du simplexe conventionnel. Nous calculons les $z_j - c_j$ pour chaque vecteur $\boldsymbol{a}_j^{(1)}$ non inclu dans la base par le produit scalaire de la première ligne de $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ avec chaque $\boldsymbol{a}_j^{(1)}$ et nous choisissons $z_k - c_k = min(z_j - c_j)$, $z_j - c_j < 0$. La première colonne ne sort jamais de $\boldsymbol{B}_1$.

Étape 3 Il reste à calculer $\boldsymbol{y}_k$ pour le vecteur entrant dans la base :

$$\boldsymbol{y}_k^{(1)} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{a}_k^{(1)} = (z_j - c_j; \boldsymbol{y}_k)$$

On détermine le vecteur sortant comme dans la méthode traditionnelle du simplexe à savoir en appliquant la formule :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min\left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0\right)$$

Grâce à la procédure traditionnelle du point-pivot du simplexe, on peut calculer la nouvelle base et la nouvelle matrice inverse.
On répète les étapes 1 à 3 jusqu'à ce que toutes les variables non incluses dans la base soient non négatives.

Nous calculons ensuite la solution optimale pour la fonction objectif $\widehat{\boldsymbol{B}}_1^{-1}$ par la technique présentée à la section 6.2, à savoir :

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_1^{-1} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{B}_1^{-1}$$

et :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_B^{(1)} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}$$

avec :

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{rk}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\dfrac{a_{2k}}{a_{rk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{rk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{rk}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 6.2 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ce système de trois inéquations linéaires à deux inconnues peut s'écrire sous la forme d'un système de quatre équations linéaires à six inconnues :

$$\begin{array}{lll} x_0 + & -3x_1 - 5x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 & = 0 \\ & x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 & = 4 \\ & 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 & = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 & = 18 \end{array}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

On définit alors :

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c_B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Étape 1 On calcule l'inverse de la nouvelle base $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ à partir de la base inversée précédente $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et

$$\boldsymbol{x}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Étape 2 On calcule les $z_j - c_j$ pour toutes les variables non incluses dans la base en calculant le produit scalaire de la première ligne de $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ avec $\boldsymbol{a}_j^{(1)}$, où :

$$\boldsymbol{a}_j^{(1)} = \begin{bmatrix} -c_j \\ \boldsymbol{a}_j \end{bmatrix}$$

Nous avons donc :

$$z_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -3$$

$$z_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -5$$

La variable x_2 entre donc dans la base, puisque $\min(z_j - c_j) = z_2 - c_2 = -5$.

Étape 3 Nous calculons $\boldsymbol{y}_k$ pour le vecteur entrant dans la base :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{a}_2^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On détermine alors quelle variable sort de la base par la méthode traditionnelle du simplexe. On calcule donc :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min\left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0\right)$$

Pour cet exemple :

x_3 : y_i non positive
x_4 : $12/2 = 6$ $\quad\rightarrow$ minimum, x_4 sort de la base.
x_5 : $18/2 = 9$

La nouvelle base est donc :

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On reprend alors à l'étape 1.

Étape 1 On calcule l'inverse de la nouvelle base par la méthode présentée à la section 6.2.

$$\boldsymbol{B}_2^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{x}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Étape 2 On calcule $z_j - c_j$ pour toutes les variables non incluses dans la base :

$$z_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -3$$

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5/2$$

La variable x_1 entre donc dans la base.

Étape 3 Nous calculons $\boldsymbol{y}_k$ pour le vecteur entrant dans la base :

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{a}_1^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On détermine alors quelle variable sort de la base par la méthode traditionnelle du simplexe. On calcule donc :

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min\left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0\right)$$

Pour cet exemple :

x_3 : $4/1 = 4$
x_2 : y_i non positive
x_5 : $6/3 = 2$ $\longrightarrow$ minimum, x_5 sort de la base.

La nouvelle base est donc :

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

On reprend alors à l'étape 1.

Étape 1 On calcule l'inverse de la nouvelle base par la méthode présentée à la section 6.2.

$$\boldsymbol{B}_3^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{x}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Étape 2 On calcule $z_j - c_j$ pour toutes les variables non incluses dans la base :

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3/2$$

$$z_5 - c_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Comme tous les $z_j - c_j$ sont positifs, la solution est optimale avec $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$ et $z = 36$.

6.4 Deuxième formulation

Cette forme est utilisée lorsqu'il est nécessaire d'ajouter des variables artificielles pour faire apparaître une matrice identité. La méthode des deux phases est employée ici en raison de la présence de variables artificielles. L'objectif de la phase I consiste à annuler ces dernières. S'il existe une solution optimale, celle-ci sera trouvée lors de la phase II.

Dantzig et Orchard utilisent une astuce pour empêcher des variables artificielles de se trouver encore dans la base à la fin de la phase I. Elle consiste à ajouter une contrainte de la forme :

$$\sum x_{ai} = 0 \tag{6.3}$$

Dans la phase I, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{cccccccccc} z^a + & x_{a1} + & \cdots & +x_{am} & & & & = & 0 \\ & x_{a1} & & & +a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & x_{am} & +a_{m1}x_1 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{6.4}$$

Nous voulons trouver une solution réalisable de base du système 6.4, avec z^a en base, qui maximise z^a. Sous une forme plus adéquate, avec $z^a = x_{n+1}$,

$x_{a1} = x_{n+2}$,..., $x_{am} = x_{n+m+1}$, le système 6.4 peut se réécrire :

$$\begin{array}{llllllll} & & & x_{n+1} & +x_{n+2}+ & \cdots & +x_{n+m+1} & = & 0 \\ a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & & +x_{n+2} & & & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n & & & & +x_{n+m+1} & = & b_m \end{array} \tag{6.5}$$

avec x_{n+1} à maximiser.

Si max $x_{n+1} = 0$, nous passons à la phase II. Si $x_{n+1} < 0$, cela signifie qu'il n'existe pas de solution réalisable.

Dans la phase II, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{lllllllll} z- & c_1x_1- & \cdots & -c_nx_n & & & & = & 0 \\ & & & & x_{n+2}+ & \cdots & +x_{n+m+1} & = & 0 \\ & a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n+ & x_{n+2} & & & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n & & & +x_{n+m+1} & = & b_m \end{array} \tag{6.6}$$

où la deuxième ligne correspond à la contrainte supplémentaire 6.3. Comme dans la phase I, le système 6.6 peut être écrit de manière plus adéquate en posant $z = x_0$, $-c_1 = a_{01}$, ..., $-c_n = a_{0n}$ et en augmentant de 1 les indices de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{b}$.

$$\begin{array}{lllllllll} x_0+ & a_{01}x_1 & +\cdots+ & a_{0n}x_n & & & & = & 0 \\ & & & & x_{n+2}+ & \cdots & +x_{n+m+1} & = & 0 \\ & a_{21}x_1 & +\cdots+ & a_{2n}x_n+ & x_{n+2} & & & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & a_{m+1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{m+1,n}x_n & & & +x_{n+m+1} & = & b_{m+1} \end{array} \tag{6.7}$$

Dans la phase I, nous maximisons x_{n+1} et ignorons x_0, puis dans la phase II, nous maximisons x_0. En phase I, toutes les variables, à l'exception de x_0 et x_{n+1}, prennent des valeurs positives. En phase II, seul x_0 peut prendre n'importe quelle valeur.

La matrice de base est :

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{B}_2^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 1 & \mathbf{-1}_m \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & \boldsymbol{I}_m \end{array}\right]$$

où $\mathbf{-1}_m$ est un vecteur de dimension m composé uniquement de -1, et $\boldsymbol{I}_m$ une matrice identité $(m \times m)$.

Lorsque $\boldsymbol{B}_2$ est donnée par (6.8), on a :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{b}^{(2)} = \left(0, -\sum_{i=1}^{m+1} b_i, b_2, ..., b_{m+1}\right)$$

$\boldsymbol{B}$ est la matrice de base pour $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ contenant $\boldsymbol{a}_j$. $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^*$ contient les prix de la phase I et $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}$ les prix de la phase II. Le produit scalaire de la deuxième ligne de $\boldsymbol{B}_2^{-1}$ avec chaque $\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ non inclu dans la base correspond à $z_j - c_j$ de la phase I, soit $z_j^a - c_j^a$. Pour déterminer le vecteur entrant en phase I, nous calculons le produit scalaire de la deuxième ligne de $\boldsymbol{B}_2^{-1}$ avec chaque $\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ hors de la base.

Le vecteur ayant la plus petite valeur entre en base. Nous calculons :

$$\boldsymbol{y}_j^{(2)} = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{a}_j^{(2)}$$

En phase I, les deux premières colonnes ne sortent jamais de la base. En phase II, $\boldsymbol{B}_2$ peut être partitionné comme suit :

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_B^{(1)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire de la première ligne de $\boldsymbol{B}_2^{-1}$ avec chaque vecteur $\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ hors base donne $z_j - c_j$. La variable $\boldsymbol{x}_{n+1}$ est traitée comme toute autre variable et peut dès lors sortir de la base. Les calculs suivants s'effectuent comme pour la première formulation.

Exemple 6.3 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{array}{rl} \text{Min } z = & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ce programme linéaire peut être converti de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Max } x_0 = \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{a1} = 12 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 + x_{a2} = 8 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4, x_{a1}, x_{a2} \geq 0 \end{aligned}$$

Étant donné que nous sommes en présence de variables artificielles, il est nécessaire d'utiliser la deuxième formulation de la méthode du simplexe révisé. Nous devons, lors de la première phase, chercher à éliminer les variables artificielles en maximisant :

$$z^a = -x_{a1} - x_{a2}$$

En posant $z^a = x_5$, $x_{a1} = x_6$ et $x_{a2} = x_7$, nous obtenons la formulation suivante du problème :

$$\begin{array}{cccccccccc} x_0 & +x_1 & +x_2 & & & & & & = 0 \\ & & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 & = 0 \\ & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 12 \\ & x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 8 \end{array}$$

Dans la phase I, nous devons maximiser x_5 et, dans la phase II, nous devons maximiser x_0. Les vecteurs sont :

$\boldsymbol{a}_0$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{b}$
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	3	2	−1	0	0	1	0	12
0	1	2	0	−1	0	0	1	8

- Phase I

La première base est composée des vecteurs $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_6$ et $\boldsymbol{a}_7$. Son inverse est :

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de base initiale est :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Nous déterminons quel vecteur entre dans la base en cherchant le minimum des $z_j^a - c_j^a$ pour les vecteurs hors base, où $z_j^a - c_j^a$ est le produit scalaire de la deuxième ligne de l'inverse de la base par $\boldsymbol{a}_j$. Nous avons :

$$\begin{aligned} z_1^a - c_1^a &= -4 \\ z_2^a - c_2^a &= -4 \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \\ z_3^a - c_3^a &= 1 \\ z_4^a - c_4^a &= 1 \end{aligned}$$

Faire entrer x_2 plutôt que x_1 dans la base est un choix arbitraire et ne modifie pas la solution. Nous devons maintenant calculer :

$$\boldsymbol{y}_2^{(2)} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{a}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et déterminer par le critère habituel quel vecteur sort de la base. Dans notre cas, il s'agit du vecteur $\boldsymbol{a}_7$.

Nous pouvons donc passer à la deuxième itération et calculer l'inverse de la deuxième base par la formule (6.2) où la 4e ligne de la matrice $\boldsymbol{E}$ est calculée à partir de $\boldsymbol{y}_2^{(2)}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_2^{-1} &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solution de base correspondante est :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Par le critère des $z_j^a - c_j^a$, nous déterminons quel vecteur entre dans la base.

$$\begin{array}{lll} z_1^a - c_1^a & = -2 & \rightarrow \text{ entre dans la base} \\ z_7^a - c_7^a & = 2 & \\ z_3^a - c_3^a & = 1 & \\ z_4^a - c_4^a & = -1 & \end{array}$$

Nous calculons :

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{a}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Nous déterminons ensuite quel vecteur sort de la base. Il s'agit ici du vecteur $\boldsymbol{a}_6$.

À la troisième itération, l'inverse de la matrice de base est:

$$\boldsymbol{B}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

et la solution de base est :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Comme $x_5 = z^a = 0$, la première phase est terminée.

- Phase II

Nous reprenons la matrice de base précédente et calculons les $z_j - c_j$ pour les vecteurs hors base. Pour ce faire, nous prenons le produit scalaire de la première ligne de $\boldsymbol{B}_3^{-1}$ avec chaque vecteur $\boldsymbol{a}_j$ hors base, mais sans tenir compte des variables artificielles.

$$\begin{aligned} z_3 - c_3 &= 1/4 \\ z_4 - c_4 &= 1/4 \end{aligned}$$

Comme tous les $z_j - c_j > 0$, la solution de base courante $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $z = 5$ est optimale.

Exemple 6.4 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 19 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

On peut écrire ce programme :

$$\begin{aligned} \text{Max } z \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 8 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{a_1} = 19 \end{aligned}$$

Comme nous sommes en présence d'un programme comprenant une variable artificielle, nous allons utiliser la méthode des deux phases.

- Phase I

Il faut dans un premier temps maximiser la fonction :

$$z^a = -x_{a_1}$$

sous les mêmes contraintes que ci-dessus. La première base comprend les vecteurs a_0, a_4, a_5 et q_1 :

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que son inverse :

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -19 \\ 8 \\ 5 \\ 19 \end{bmatrix}$$

ainsi que le produit scalaire de la deuxième ligne de $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ par chaque vecteur $\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ hors base.

$$\begin{aligned} z_1^a - c_1^a &= -5 \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \\ z_2^a - c_2^a &= -2 \\ z_3^a - c_3^a &= -1 \end{aligned}$$

On détermine quel vecteur sort de la base par le critère habituel du rapport. Dans notre cas, il s'agit de $\boldsymbol{a}_5^{(2)}$. Nous calculons alors la nouvelle base et son inverse, calcul simple si l'on applique la formule 6.2. Nous avons :

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons les valeurs des variables de base :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13/2 \\ 11/2 \\ 5/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}$$

ainsi que le produit scalaire de la deuxième ligne de $\boldsymbol{B}_2^{-1}$ par chaque vecteur $\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ hors base.

$$\begin{aligned} z_5^a - c_5^a &= 5/2 \\ z_2^a - c_2^a &= -9/2 \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \\ z_3^a - c_3^a &= 1 \end{aligned}$$

On détermine quel vecteur sort de la base par le critère habituel du rapport. Dans notre cas, il s'agit de $\boldsymbol{a}_4^{(2)}$. Nous calculons alors la nouvelle base et son inverse.

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2/9 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons les valeurs des variables de base :

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11/9 \\ 28/9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que le produit scalaire de la deuxième ligne de $\boldsymbol{B}_3^{-1}$ par chaque vecteur

$\boldsymbol{a}_j^{(2)}$ hors base.

$$\begin{aligned} z_5^a - c_5^a &= 2 \\ z_4^a - c_4^a &= 1 \\ z_3^a - c_3^a &= -2 \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \end{aligned}$$

On détermine quel vecteur sort de la base par le critère habituel du rapport. Dans notre cas, il s'agit de $\boldsymbol{q}_1^{(2)}$. Nous calculons alors la nouvelle base et son inverse.

$$\boldsymbol{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 & -7/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/18 & 1/9 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Calculons les valeurs des variables de base:

$$\boldsymbol{x}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14/9 \\ 59/18 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Comme la valeur de $z^a = 0$, la phase I est terminée et nous pouvons passer à la phase II à partir du tableau suivant qui correspond à la dernière étape de la phase I

- Phase II

	c_j		0	0	0	0	0	-1
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{q}_1$
0	$\boldsymbol{a}_2$	14/9	0	1	0	$-1/9$	$-7/9$	1/3
0	$\boldsymbol{a}_1$	59/18	1	0	0	$-1/18$	1/9	1/6
0	$\boldsymbol{a}_3$	1/2	0	0	1	$-1/2$	-1	1/2
	$(z_j - c_j)$	0	0	0	0	0	0	1

Nous replaçons les c_j originaux et nous supprimons la variable artificielle. Le tableau devient alors le suivant :

	c_j		2	3	5	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
3	$\boldsymbol{a}_2$	14/9	0	1	0	−1/9	−7/9
2	$\boldsymbol{a}_1$	59/18	1	0	0	−1/18	1/9
5	$\boldsymbol{a}_3$	1/2	0	0	1	−1/2	−1
	$(z_j - c_j)$	247/18	0	0	0	−53/18	−128/18

Nous constatons toutefois que toutes les valeurs y_{i4} sont négatives ; il n'est donc pas nécessaire de poursuivre car nous savons que la solution optimale est infinie.

6.5 Exercices

1. Soit la matrice :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calculer son inverse.

   (b) Calculer l'inverse de la matrice :

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   grâce à la méthode de factorisation.

2. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \; & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} \; & 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ \text{et} \; & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Écrire ce programme sous forme matricielle.

(b) Résoudre ce programme par la méthode du simplexe révisé.

3. Résoudre par la méthode du simplexe révisé le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 2 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Résoudre par la méthode du simplexe révisé le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 5x_1 - x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 15 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

5. Résoudre par la méthode du simplexe révisé le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } z = \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chapitre 7

La dualité

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il est possible à partir d'un programme linéaire d'en former un autre directement lié au premier. Celui-ci est appelé primal et le second dual.

La notion de dualité a été introduite par Von Neumann en 1947, puis développée par Gale, Kuhn et Tucker en 1951. Les propriétés fondamentales des problèmes de dualité ont été définies par Goldman and Tucker en 1956.

Nous commencerons par illustrer cet énoncé à l'aide d'un exemple, puis nous continuerons par l'étude des relations existant entre le primal et le dual. Ensuite, nous évoquerons quelques propriétés fondamentales des problèmes de dualité ainsi que l'interprétation économique possible des variables du problème dual.

Nous présenterons finalement, à l'aide d'un exemple, l'algorithme dual du simplexe.

7.2 Un exemple de programme linéaire dual

Considérons le problème de programmation linéaire suivant : une fabrique quelconque produit n outputs différents en utilisant m matériaux bruts comme inputs. Chaque unité de l'output j a un prix de vente égal à c_j, $j = 1, 2, ..., n$, et requiert pour sa fabrication une quantité a_{ij} des différents inputs, $i = 1, 2, ...m$. La quantité totale disponible pour le matériau i est notée b_i. Quelle

quantité x_j de chaque output, $j = 1, 2, ...n$, faut-il produire afin de maximiser le chiffre d'affaires ?

Comme nous l'avons déjà vu dans les chapitres précédents, nous pouvons écrire le problème de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{s.c.} \quad & a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \\ \text{et} \quad & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

ou sous sa forme matricielle :

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \text{et} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des vecteurs-colonnes à n composantes, $\boldsymbol{b}$ un vecteur-colonne à m composantes et $\boldsymbol{A}$ une matrice de dimension $m \times n$.

Supposons à présent que le directeur financier désire assurer les différents inputs contre le feu, les inondations ou contre une éventuelle perte. Selon les règles de la rationalité économique, il est souhaitable de payer les primes les plus basses possibles, tout en s'assurant que les prestations seront assez élevées pour couvrir complètement les pertes, c'est-à-dire remplacer le revenu des ventes en cas de sinistre.

En tenant compte de ces considérations, comment définir le plan d'assurances optimal ?

Notons par u_i la prime d'assurance unitaire pour l'input i, $i = 1, 2, ..., m$ de telle sorte que la prime totale pour chaque input s'élève à b_iu_i. De plus, la prime d'assurance ne pouvant prendre une valeur négative, nous sommes confrontés à une contrainte de non-négativité:

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

Si nous considérons que le coût de l'assurance est la somme des primes pour chaque input, la fonction objectif à minimiser est donc :

$$\text{Min } z^* = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m$$

Quelles que soient les valeurs individuelles des différents inputs, il est évident que les assurances combinées de tous les inputs nécessaires pour

produire une unité du premier produit (c'est-à-dire a_{11} unités du premier input, a_{21} unités du deuxième input, etc) doivent être au moins égales à c_1. Cette contrainte s'exprime mathématiquement sous la forme :

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1$$

On peut également dire que cet ensemble d'inputs pourrait être assemblé en une unité du produit 1 et être vendu au prix de c_1. Pour chaque produit, la combinaison des inputs sera différente. Par conséquent, pour obtenir des primes adéquates, il faut s'assurer que la prime totale de tous les inputs requis pour produire une unité de chaque output est au moins égale au revenu provenant d'une unité d'output vendue, à savoir :

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq c_j, \;\; j = 1, 2, ..., n$$

Compte tenu de ce qui vient d'être formulé, nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m \\ \text{s.c.} & & a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq c_j, \; j = 1, 2, ..., n \\ \text{et} & & u_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., m \end{array}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c} \\ \text{et} & & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

En plaçant les deux problèmes de programmation linéaire côte à côte sous leur forme matricielle, on remarque qu'ils sont symétriques.

Problème de production			Problème d'assurances		
Max z	$=$	$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$	Min z^*	$=$	$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$
s.c.		$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	s.c.		$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}$
et		$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	et		$\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$

Le vecteur des coûts ($\boldsymbol{c}$) dans la fonction objectif du premier problème correspond au membre de droite des contraintes du second problème. La matrice des contraintes ($\boldsymbol{A}$) dans le premier problème est simplement transposée dans le second problème. L'existence de ces relations, nous permet

d'affirmer que le second problème est le dual du premier (ou vice-versa). Ces deux problèmes possèdent les mêmes valeurs optimales pour leur fonction objectif. Cela est dû au fait que la valeur totale de l'assurance des inputs correspond précisément au chiffre d'affaires maximal que l'on peut obtenir avec ces inputs.

7.3 Relations entre le primal et le dual d'un problème de programmation linéaire

Nous avons vu au chapitre 5 qu'un problème de programmation linéaire pouvait se présenter sous deux formes différentes : la forme canonique et la forme standard. Nous nous intéressons en premier lieu à la forme canonique d'un programme linéaire qui s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \text{et} & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7.1}$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des vecteurs-colonnes à n composantes, $\boldsymbol{b}$ un vecteur-colonne à m composantes et $\boldsymbol{A}$ une matrice de dimension $m \times n$.

Le programme linéaire suivant est appelé **dual** ou **problème dual** du problème de programmation linéaire (7.1) :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c} \\ \text{et} & & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7.2}$$

où $\boldsymbol{u}$ est un vecteur-colonne à m composantes. Tous les autres vecteurs, de même que la matrice $\boldsymbol{A}$, sont identiques à ceux du programme linéaire (7.1).

Les programmes linéaires (7.1) et (7.2) sont respectivement appelés le problème primal et le problème dual ou, plus simplement, le primal et le dual. Le problème typique consiste à poser le dual à partir du primal ; il s'agit donc d'examiner les relations existant entre le primal et son dual.

Afin de poser le dual à partir du primal, il faut tout d'abord que la maximisation devient une minimisation. Les variables ne sont plus les mêmes, par conséquent, nous les notons non plus $\boldsymbol{x}$ mais $\boldsymbol{u}$. Les prix de ces nouvelles variables dans la fonction objectif à minimiser sont les constantes des contraintes du problème primal. À chaque contrainte du primal correspond une variable duale et à chaque contrainte du dual correspond une variable primale. Notons que la matrice des coefficients des contraintes se retrouve dans sa forme transposée pour le dual. Les nouvelles constantes des contraintes sont les prix de la fonction objectif du problème primal. Il ne faut pas oublier de changer le sens des inégalités dans les contraintes.

Afin de bien saisir le mécanisme décrit ci-dessus, nous nous proposons d'effec-tuer la transformation d'un problème primal en dual en partant d'un exemple.

Exemple 7.1 *Soit le problème linéaire suivant, considéré comme étant le primal :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c.} & & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & & 3x_1 - x_3 \leq 6 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Nous obtenons le dual correspondant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & 7u_1 + 6u_2 \\ \text{s.c.} & & u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ & & 3u_1 \geq 5 \\ & & 2u_1 - u_2 \geq 4 \\ \text{et} & & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Nous voyons que la maximisation est devenue une minimisation, en tenant compte des modifications suivantes : les deux contraintes du primal deviennent les deux variables du dual et à chacune des trois variables du primal correspond une contrainte duale. La matrice des coefficients des contraintes du primal, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

devient pour le dual :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des constantes du primal, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$, devient le vecteur des prix du dual, $\boldsymbol{b}' = [7; 6]$. Quant au vecteur des prix du primal, $\boldsymbol{c}' = [2; 5; 4]$, il se transforme en vecteur des constantes du dual $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Nous pouvons représenter un problème primal et son dual associé dans un tableau que l'on doit à A.W. Tucker (Dantzig, 1966, p.90).

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
	$\geq c_1$	$\geq c_2$	...	$\geq c_n$	

Tableau 6.1 : Tableau de Tucker

Le problème primal se lit dans le sens des lignes, tandis que le problème dual se lit dans le sens des colonnes. En multipliant chaque a_{ij}par la variable $x_j$correspondant, on obtient les contraintes du problème primal. Sa fonction objectif est reproduite en multipliant chaque $c_j$par la variable $x_j$correspondant. Les mêmes opérations sont effectuées sur les colonnes pour trouver le problème dual.

L'exemple 7.2 représente un problème de programmation linéaire et son dual formulés à l'aide du tableau de Tucker.

Exemple 7.2 *Soit le tableau de Tucker suivant :*

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	10	13	22	0	≤ 101
u_2	11	18	0	0	≤ 107
u_3	15	19	0	4	≤ 79
u_4	17	21	3	7	≤ 81
	≥ 50	≥ 61	≥ 49	≥ 30	

On obtient le problème primal :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 50x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 30x_4 \\ \text{s.c.} & & 10x_1 + 13x_2 + 22x_3 \leq 101 \\ & & 11x_1 + 18x_2 \leq 107 \\ & & 15x_1 + 19x_2 + 4x_4 \leq 79 \\ & & 17x_1 + 21x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 81 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

ainsi que le problème dual :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & 101u_1 + 107u_2 + 79u_3 + 81u_4 \\ \text{s.c.} & & 10u_1 + 11u_2 + 15u_3 + 17u_4 \geq 50 \\ & & 13u_1 + 18u_2 + 19u_3 + 21u_4 \geq 61 \\ & & 22u_1 + 3u_4 \geq 49 \\ & & 4u_3 + 7u_4 \geq 30 \\ \text{et} & & u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{array}$$

Nous venons de montrer comment passer d'un problème primal à un problème dual. Notez que les noms de primal et dual sont interchangeables puisque, comme l'énonce le théorème 7.1, le dual du dual est le primal.

Théorème 7.1

Considérons un problème de programmation linéaire P, appelé problème primal. Le problème dual correspondant à P est noté D. Alors le problème dual associé à D est le problème de programmation linéaire P, autrement dit le problème primal.

Démonstration

Si nous voulons trouver le dual du problème de programmation (7.2), qui est un problème dual, il nous faut tout d'abord transformer ce problème sous sa forme canonique.

La fonction objectif :

$$\text{Min } z^* = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$$

devient

$$\text{Max } z^{**} = -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$$

La contrainte :

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}$$

est équivalente à

$$-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \leq -\boldsymbol{c}$$

Les contraintes de non-négativité $\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ apparaissent déjà sous forme canonique. Nous obtenons alors le problème dual original suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z^{**} & = & -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \\ \text{s.c.} & & -\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \leq -\boldsymbol{c} \\ \text{et} & & \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{7.3}$$

Il s'agit à présent d'effectuer les changements nécessaires, de manière à obtenir le problème dual associé au programme linéaire (7.3). Nous obtenons ainsi le dual du problème dual original :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^{***} & = & -\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} & & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ \text{et} & & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

La fonction objectif Min $z^{***} = -\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ est équivalente à Max $z = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ et en multipliant les contraintes par (-1) on obtient $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Nous obtenons finalement :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \text{et} & & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{7.4}$$

qui correspond au problème primal (7.1).

Jusqu'ici, nous avons traité que la transformation en dual de problèmes de programmation linéaire sous forme canonique. Nous allons maintenant étudier comment obtenir le dual d'un même problème énoncé sous sa forme standard :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \text{et} & & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{7.5}$$

Le problème dual associé au problème (7.5) est le suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c} \\ \text{et} & & \boldsymbol{u} \text{ sans restriction de signe} \end{array}$$

Cela signifie que des contraintes d'égalité dans le primal conduisent à des variables sans restriction de signe dans le dual. De même, selon le théorème 7.1, des variables sans restriction de signe dans le primal conduisent à des contraintes d'égalité dans le dual.

S'il apparaît, dans un problème de programmation linéaire comprenant une fonction objectif à maximiser, une contrainte de la forme :

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \geq b_i$$

il suffit de la multiplier par -1 afin d'obtenir une contrainte équivalente qui soit de la forme :

$$-a_{i1}x_1 - ... - a_{in}x_n \leq -b_i$$

Ce n'est qu'à partir de cette forme que l'on peut chercher le problème dual associé.

De même, pour un problème de programmation linéaire dont la fonction objectif est à minimiser, on doit multiplier par -1 les contraintes se présentant sous la forme :

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$$

afin d'obtenir des contraintes équivalentes de la forme :

$$-a_{i1}x_1 - ... - a_{in}x_n \geq -b_i$$

Voici maintenant un problème de programmation linéaire qui n'est pas écrit sous une forme particulière. Il s'agit en quelque sorte de la généralisation du passage d'un problème primal à un problème dual.

Si le problème de programmation linéaire primal P est :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Max } z & = & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{s.c.} & & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& & \vdots \\
& & a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n \leq b_r \\
& & a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + ... + a_{r+1,n}x_n = b_{r+1} \\
& & \vdots \\
& & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\
& & \\
\text{et} & & x_j \geq 0, j = 1, ..., s \\
& & x_j \text{ sans restriction de signe pour } j = s+1, ..., n
\end{array}$$

alors le problème dual correspondant D est :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Min } z^* & = & b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m \\
\text{s.c.} & & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1 \\
& & \vdots \\
& & a_{1s}u_1 + a_{2s}u_2 + ... + a_{ms}u_m \geq c_s \\
& & a_{1,s+1}u_1 + a_{2,s+1}u_2 + ... + a_{m,s+1}u_m = c_{s+1} \\
& & \vdots \\
& & a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m = c_n \\
& & \\
\text{et} & & u_i \geq 0, i = 1, ..., r \\
& & u_i \text{ sans restriction de signe pour } i = r+1, ..., m
\end{array}$$

Les différentes relations existant entre le primal et le dual sont résumées dans le tableau 7.2.

Primal	Dual
maximisation	minimisation
contrainte $\leq$	variable $u_i \geq 0$
contrainte $=$	variable u_i sans restriction de signe
variable $x_j \geq 0$	contrainte $\geq$
variable x_j sans restriction de signe	contrainte $=$

Tableau 7.2 : relations entre primal et dual

Remarque 7.1 *Les appellations "Primal" et "Dual" sont arbitraires et peuvent tout à fait être interverties.*

7.4 Propriétés fondamentales des problèmes de dualité

Dans ce paragraphe, nous allons voir les relations qui existent entre les solutions du problème primal et celles du problème dual. Nous allons tout d'abord démontrer que si l'un des deux problèmes a une solution optimale, il en va de même pour le second, puis que ces deux solutions sont identiques. Le théorème 7.2 indique que la valeur de la fonction objectif du primal est inférieure ou égale à celle du dual.

Théorème 7.2

Considérons un problème primal sous forme canonique et son dual. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$ sont respectivement des solutions réalisables du primal et du dual, alors :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \quad \text{ou} \\ z \leq z^* \end{gathered}$$

Démonstration

Nous avons pour le primal $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, puisque $\boldsymbol{x}$ est une solution réalisable. Nous pouvons multiplier cette inégalité par $\boldsymbol{u}'$ puisque $\boldsymbol{u}' \geq \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{u}'\boldsymbol{b}$$

Nous pouvons transposer $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{b}$ puisqu'il s'agit d'un scalaire. Nous avons donc :

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$$

D'autre part, nous avons pour le dual $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}$, puisque $\boldsymbol{u}$ est une solution réalisable. Nous pouvons transposer cette inégalité en :

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}'$$

Nous la multiplions ensuite par $\boldsymbol{x}$, ce qui est possible car $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, et nous obtenons :

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

De $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, nous en déduisons que :

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$$

Le théorème 7.3 implique que si le primal possède une solution optimale, c'est également le cas du dual et vice-versa.

De plus, ces solutions optimales sont identiques.

Théorème 7.3

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$ sont respectivement les solutions réalisables d'un problème primal et d'un problème dual et si $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$, alors $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$ sont les solutions optimales pour leur problème respectif.

Démonstration

Si $\boldsymbol{x}^*$ est une autre solution réalisable quelconque du primal, alors en application du théorème 6.2, nous avons :

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$$

Or, $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$ est égal à $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, par conséquent :

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

Puisque le primal est un problème de maximisation, $\boldsymbol{x}$ est une solution optimale.

Un raisonnement analogue montre que $\boldsymbol{u}$ est une solution optimale du problème dual.

Les deux théorèmes suivants ont été énoncé par Gale, Kuhn et Tucker [3].

Théorème 7.4

Une solution réalisable du primal $\boldsymbol{x}$ est optimale si et seulement s'il existe une solution réalisable du dual $\boldsymbol{u}$ pour laquelle $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$.

Ce théorème peut être prouvé à l'aide du "lemme de Minkovski-Farka" (se référer à Simmonard, 1972, pp. 234-238), qui est un résultat connu depuis longtemps en programmation linéaire.

Théorème 7.5

a) Un programme linéaire possède une solution optimale finie si et seulement si lui et son dual possèdent des solutions réalisables.

b) Si le problème primal possède une solution optimale infinie, alors le dual n'a pas de solution réalisable.

c) Si le dual ne possède pas de solution réalisable, alors que le primal en possède, alors la solution du primal est une solution optimale infinie.

Ce théorème prouve l'existence du problème dual. Nous avons réuni les énoncés précédents dans le tableau ci-dessous.

	Primal	
Dual	Réalisable	Non réalisable
Réalisable	Solutions optimales pour les deux problèmes	Solution optimale infinie pour le dual
Non réalisable	Solution optimale infinie pour le primal	Solution optimale pouvant se présenter

Tableau 7.3 : Solutions

Voici un exemple où le problème primal a une solution optimale infinie et où, par conséquent, le dual n'a pas de solutions réalisables.

Exemple 7.3 *Soit le problème de programmation linéaire primal suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

En posant $x_1 = 0$, on peut faire croître x_2 à l'infini, les contraintes restant satisfaites. On a donc une solution optimale infinie. Le dual de ce problème est :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & 2u_1 + 6u_2 \\ \text{s.c.} & & 2u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ & & -u_1 - 2u_2 \geq 1 \\ \text{et} & & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

La seconde contrainte ne peut pas être satisfaite simultanément avec les contraintes de non-négativité. Par conséquent, il n'y a pas de solutions réalisables.

Nous concluons ce paragraphe par un exemple où le primal et son dual n'ont pas de solutions réalisables.

Exemple 7.4 *Soit le primal :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

le dual est alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & -u_2 \\ \text{s.c.} & & u_1 - u_2 \geq 3 \\ & & -u_1 + u_2 \geq 1 \\ \text{et} & & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Aucun problème n'a de solution réalisable, car les contraintes ne peuvent être satisfaites simultanément.

7.5 Interprétation économique des variables duales

L'interprétation économique de la dualité dépend directement du problème primal. Le tableau 7.4 résume l'interprétation possible d'un problème primal.

Notation	Interprétation
x_j	quantité de produit j à fabriquer
c_j	profit associé à une unité du produit j
a_{ij}	quantité de ressource i requise pour produire une unité du produit j
b_i	quantité de ressource i disponible
z	profit total provenant de la fabrication de tous les produits

Tableau 7.4 : Interprétation économique d'un problème primal

Exemple 7.5 *Pour une entreprise engagée dans deux activités requé-rant deux ressources, on pourrait avoir le programme linéaire suivant :*

Le dual du programme (7.5) est :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 350x_1 + 230x_2 \\ \text{s.c.} & & 12x_1 + 7x_2 \leq 750 \text{ (6.5)} \\ & & 7x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{7.6}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & 750u_1 + 200u_2 \\ \text{s.c.} & & 12u_1 + 7u_2 \geq 350 \\ & & 7u_1 + 3u_2 \geq 230 \\ \text{et} & & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Les solutions de ces deux problèmes sont pour le primal : $x_1 = 0$ et $x_2 = 66,6667$ et pour le dual : $u_1 = 0$ et $u_2 = 76,6667$. Par conséquent $z = z^* = 15333,34$.

Afin de saisir le sens économique des variables duales, appelées en théorie économique "prix fantômes" (en anglais "shadow prices"), augmentons la ressource 2 d'une unité. Le programme à résoudre devient alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 350x_1 + 230x_2 \\ \text{s.c.} & & 12x_1 + 7x_2 \leq 750 \\ & & 7x_1 + 3x_2 \leq 201 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{7.7}$$

La nouvelle solution optimale est $x_1 = 0$, $x_2 = 67$ et $z = 15\ 410$. La variation du profit total est donc égale à $76,66$ ($= 15\ 410 - 15\ 333,34$) lorsque l'on augmente la ressource 2 d'une unité.

Cette variation représente justement la valeur de u_2 dans la solution optimale du dual. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre le problème (7.6).

Par conséquent, les variables duales $\boldsymbol{u}$ permettent de mesurer l'incidence de chacune des ressources sur le profit. En résumé, lorsque la fonction objectif est une maximisation, u_i mesure le changement marginal de $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ par rapport à b_i.

Il est évident que le sens économique des variables duales varie en fonction du sens économique du vecteur $\boldsymbol{c}$. Ainsi, si $\boldsymbol{c}$ représente les profits unitaires, alors $\boldsymbol{u}$ représente le profit marginal imputable à l'augmentation de la

quantité disponible d'une ressource. De plus, pour une même interprétation du primal, il est parfaitement envisageable d'en trouver plusieurs pour les solutions du dual. Supposons que notre exemple soit un problème de maximisation du profit. Dans ce cas, la première interprétation du dual est celle qui a été donnée à la page précédente. Supposons maintenant que l'entreprise doive emprunter pour obtenir cette unité supplémentaire de ressource 2, elle devra payer des intérêts pour cet emprunt. Le calcul du prix fantôme indique alors à l'entrepreneur s'il peut emprunter, c'est-à-dire si les intérêts sont inférieurs au supplément de profit qu'il peut retirer. Autre hypothèse, l'entreprise n'a pas besoin d'emprunter pour acquérir cette unité supplémentaire, elle dispose au contraire de fonds pour lesquels elle cherche le meilleur placement. Le calcul de u_2 lui indique alors l'avantage qu'elle retirerait à placer ces fonds dans des ressources supplémentaires, en sachant bien sûr ce que lui rapporterait d'autres possibilités.

La valeur trouvée pour une variable duale n'est valable que pour la variation de la dernière unité de la ressource considérée, comme dans toute théorie marginale.

7.6 L'algorithme dual du simplexe

On utilise généralement l'algorithme dual du simplexe lorsque la solution de base n'est pas réalisable, et que l'algorithme du simplexe primal ne permet pas de modifier la base courante; tout particulièrement, si tous les $z_j - c_j \geq 0$, mais que $\boldsymbol{x}_B \leq 0$. Nous verrons au chapitre 8 que l'algorithme dual du simplexe doit être utilisé dans de nombreux cas de postoptimisation. Voici un exemple d'application de l'algorithme dual du simplexe.

Exemple 7.6 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \text{Min } z = \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ce problème s'écrit sous la forme standard :

$$\begin{aligned} \text{Min } z = \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 9 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Si ce programme devait être résolu par la méthode traditionnelle du simplexe, il faudrait ajouter des variables artificielles, puisque, sous forme standard, les coefficients des variables d'écart sont négatifs. Considérons la base qui contient les variables x_3 et x_4, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour cette base, la solution correspondante est :

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \end{bmatrix}$$

D'autre part, $z_1 - c_1 = 3$ et $z_2 - c_2 = 4$. Nous sommes donc dans la situation où $z_j - c_j \geq 0$, mais $\boldsymbol{x}_B \leq 0$. Nous pouvons dès lors utiliser la méthode duale du simplexe, sans ajouter de variables artificielles.

Le tableau initial est le suivant :

	c_j		-3	-4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
0	$\boldsymbol{a}_3$	-12	-1	-2	1	0
0	$\boldsymbol{a}_4$	-9	-2	-1	0	1
	$(z_j - c_j)$	$z = 0$	3	4	0	0

Notons que $\boldsymbol{y}_j = -\boldsymbol{a}_j$, puisque $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{I}$. Dans la méthode duale du simplexe, nous commençons par déterminer quel vecteur sort de la base par le critère :

$$\boldsymbol{a}_k = \min_i \{x_{Bi}\}$$

Il s'agit dans notre cas du vecteur $\boldsymbol{a}_3$.

Il faut ensuite déterminer quel vecteur va entrer dans la base en calculant :

$$\frac{z_r - c_r}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{jk}} \right\}$$

Dans notre cas nous avons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 : \quad & \frac{3}{-1} = -3 \\ \boldsymbol{a}_2 : \quad & \frac{4}{-2} = -2 \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \end{aligned}$$

Le pivotement s'effectue comme pour le simplexe original et le deuxième tableau de notre exemple est alors le suivant :

	c_j		-3	-4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
-4	$\boldsymbol{a}_2$	6	$1/2$	1	$-1/2$	0
0	$\boldsymbol{a}_4$	-3	$-3/2$	0	$-1/2$	1
	$(z_j - c_j)$	$z = -24$	1	0	2	0

Les $z_j - c_j$ sont tous positifs, mais une des variables de base est encore négative, puisque $x_{B4} < 0$. C'est donc le vecteur $\boldsymbol{a}_4$ qui doit sortir de la base. Nous devons déterminer quel vecteur va y entrer.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 : \quad & \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3} \quad \rightarrow \text{ entre dans la base} \\ \boldsymbol{a}_3 : \quad & \frac{2}{-1/2} = -4 \end{aligned}$$

Nous procédons alors au pivotement et le nouveau tableau est :

	c_j		-3	-4	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
-4	$\boldsymbol{a}_2$	5	0	1	$-2/3$	$1/3$
-3	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	$1/3$	$-2/3$
	$(z_j - c_j)$	$z = -26$	0	0	$5/3$	$2/3$

Comme toutes les variables de bases et tous les $z_j - c_j$ sont positifs, la solution de base est réalisable et optimale, avec $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ et $z = -26$.

7.7 Exercices

1. Trouvez le dual du programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \max z & = & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & & x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ & & x_2 \leq 5 \\ & & 2x_3 \leq 6 \\ \text{et} & & x_i \geq 0 \end{array}$$

2. Idem.

$$\begin{array}{rcl} \min z & = & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.c.} & & x_1 - x_2 \leq 7 \\ & & x_3 - x_4 \leq 9 \\ & & -x_1 + x_3 \leq 3 \\ & & x_2 + x_4 \leq 5 \\ \text{et} & & x_i \text{ sans restriction de signe} \end{array}$$

3. Utilisez l'algorithme dual du simplexe pour résoudre ce programme linéaire :

$$\begin{array}{rl} \text{Min } z = & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.c.} & 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. Idem.

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z = & -3x_1 - x_2 \\ \text{s.c.} & 4x_1 + 6x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

5. Idem.

$$\begin{array}{rl} \text{Min } z = & 8x_1 - 12x_2 \\ \text{s.c.} & -3x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \geq 1 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

6. Une usine d'automobiles utilise deux facteurs de production, le capital K et le travail L. Elle dispose de deux chaînes de montage dont les

fonctions de production pour une automobile sont :

Chaînes de montage	Fonction de production
P_1	$10K + 4L \geq 4000$
P_2	$5K + 4L \geq 2200$

Sachant que le prix d'une unité de capital est 4 et que celui d'une unité de travail est 2, trouvez les quantités de capital et de travail qui minimisent le coût de production d'une automobile à l'aide de l'algorithme dual du simplexe.

7. Une entreprise produit 3 biens : x_1, x_2 et x_3, qu'elle vend respectivement aux prix de 4, 4 et 8 CHF. Pour ces trois produits, elle dispose de trois inputs b_1, b_2 et b_3. Le tableau ci-dessous présente les quantités de chaque input nécessaires à la production d'une unité des différents biens ainsi que les quantités d'inputs disponibles :

Inputs	Biens			Quantité
	x_1	x_2	x_3	disponible
b_1	1	1	2	15
b_2	0	1	1	10
b_3	1	1	4	20

   (a) Trouvez le plan de production qui maximise le chiffre d'affaire.
   (b) Cette entreprise désire assurer les inputs contre le feu. Trouvez les primes relatives à chaque input permettnat à l'entreprise de minimiser la somme des primes, tout en conservant le même revenu unitaire pour chaque bien.
   (c) Donnez une interprétation économique du résultat trouvé en (b).

Chapitre 8

Postoptimisation et analyse de sensibilité

8.1 Introduction

L'analyste qui a pour tâche de résoudre des problèmes de programmation linéaire ne se contente en général pas de la solution optimale. Il s'intéresse également à de nouvelles solutions optimales issues de la modification d'un ou de plusieurs éléments du problème original. Cette démarche devrait impliquer l'établissement d'un nouveau programme linéaire ainsi que le calcul d'une nouvelle solution optimale, ce qui peut, selon la compléxité du problème considéré, nécessiter beaucoup de temps et d'efforts. Au lieu de recommencer toute la procédure à chaque modification, il est souvent possible, sous certaines conditions, d'utiliser la solution optimale du problème initial comme solution de départ du problème modifié. Cette procédure de **postoptimisation** comporte différents types de modifications. D'une manière générale, les problèmes qui relèvent de la postoptimisation se répartissent en trois catégories, à savoir les problèmes impliquant des changements ponctuels parmi les paramètres a_{ij}, b_j et c_j, les problèmes impliquant des changements continus et les problèmes impliquant des changements structurels, soit l'addition ou la suppression de variables ou de contraintes. Mentionnons que les problèmes impliquant des changements continus forment ce qu'on appelle en recherche opérationnelle l'**analyse de sensibilité**. On s'intéresse particulièrement à l'intervalle ou domaine dans lequel les paramètres a_{ij}, b_j et c_j peuvent varier sans que la solution optimale ne soit modifiée.

8.2 Changements ponctuels parmi les paramètres a_{ij}, b_j et c_j

Soit un programme linéaire de la forme :

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & z & = & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{Ax} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

où $\boldsymbol{c}$ correspond au vecteur des coefficients associé à la fonction objectif et $\boldsymbol{b}$ au vecteur du second membre des contraintes. La matrice $\boldsymbol{A}$ $(m \times n)$ des coefficients des contraintes est partagée en deux sous-matrices $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}\,|\boldsymbol{N}\,]$, $\boldsymbol{B}$ correspondant aux vecteurs de base et $\boldsymbol{N}$ aux vecteurs hors base.

8.2.1 Modification de $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{c}^*$

Ce type de changement est facile à traiter puisque l'ensemble de solutions réalisables reste le même.

Soit $\boldsymbol{B}$, la base optimale correspondant au programme linéaire original. Si le c_j modifié est associé à une variable de base, on calcule :

$$z_j^* - c_j^* = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^* \boldsymbol{y}_j - c_j^*$$

Si $z_j^* - c_j^* \geq 0$ pour tout j, alors la solution optimale du problème original reste la solution optimale du problème modifié. Sinon, il faut utiliser l'algorithme du simplexe à partir de la base $\boldsymbol{B}$.

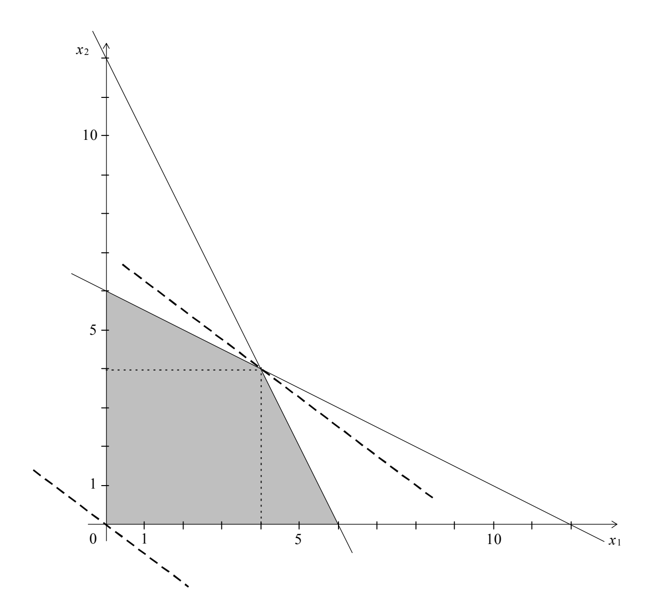
Si le c_j modifié correspond à une variable non incluse dans la base, le seul terme du tableau qui sera modifié est le $z_j - c_j$ de la variable en question. Il devient alors $z_j - c_j^*$ et l'on procède ensuite comme précédemment.

Nous avons montré au chapitre 4 comment un problème de programmation linéaire pouvait être représenté graphiquement. De la même manière, nous allons illustrer l'effet d'une modification du vecteur des coefficients $\boldsymbol{c}$ de la fonction objectif en $\boldsymbol{c}^*$.

Exemple 8.1 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} & & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La Figure 8.1 illustre la représentation graphique de ce problème ainsi que la solution optimale $x_1 = x_2 = 4$.



Voyons maintenant comment ce problème se modifie lorsque $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est remplacé par $\boldsymbol{c}^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$.

Nous avons présenté au chapitre 5 la résolution de ce problème à l'aide de la méthode du simplexe. Le tableau du simplexe après deux itérations était alors le suivant :

	c_j		3	4	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
3	$\boldsymbol{a}_1$	4	1	0	2/3	-1/3
4	$\boldsymbol{a}_2$	4	0	1	-1/3	2/3
	$(z_j - c_j)$	28	0	0	2/3	5/3

Avec le nouveau vecteur $\boldsymbol{c}^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$, le tableau devient :

	c_j		6	4	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
6	$\boldsymbol{a}_1$	4	1	0	2/3	-1/3
4	$\boldsymbol{a}_2$	4	0	1	-1/3	2/3
	$(z_j - c_j)$	40	0	0	8/3	2/3

Comme tous les $(z_j - c_j) \geq 0$, le vecteur $\boldsymbol{x_B}$ reste une solution de base optimale comme dans le problème original.

Graphiquement, une telle modification correspond à un changement de la pente de la fonction objectif. Cette nouvelle situation est présentée dans la Figure 8.2, où l'on voit la nouvelle fonction objectif avec $z = 40$ ainsi que la solution optimale $x_1 = x_2 = 4$.

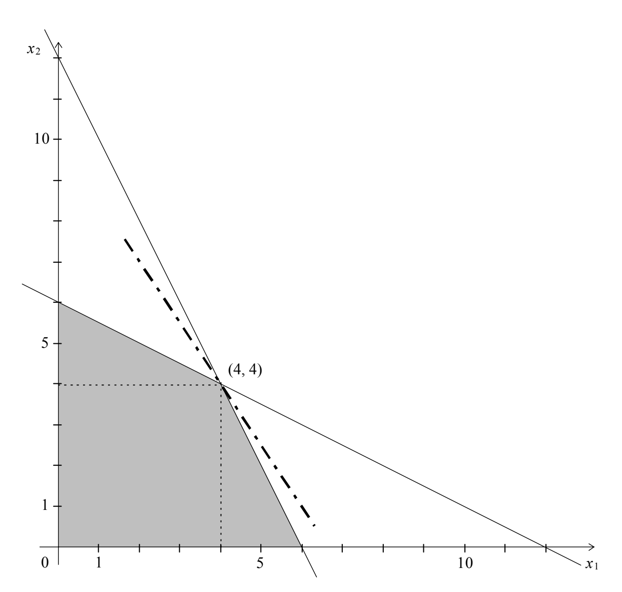


Figure 8.2 : Résolution graphique avec $c_1 = 6$

Voyons maintenant deux cas où la solution de base n'est plus optimale. Avec $c_1 = 8$, la solution optimale n'est plus unique, puisque nous avons $z_4 - c_4 = 0$, alors que $z_3 - c_3 > 0$. Graphiquement, cela se traduit par une situation où la fonction objectif est parallèle à un segment de l'ensemble des solutions réalisables (Figure 8.3). Toutes les combinaisons situées sur le segment reliant les points (4 ;4) et (6 ;0) sont optimales.

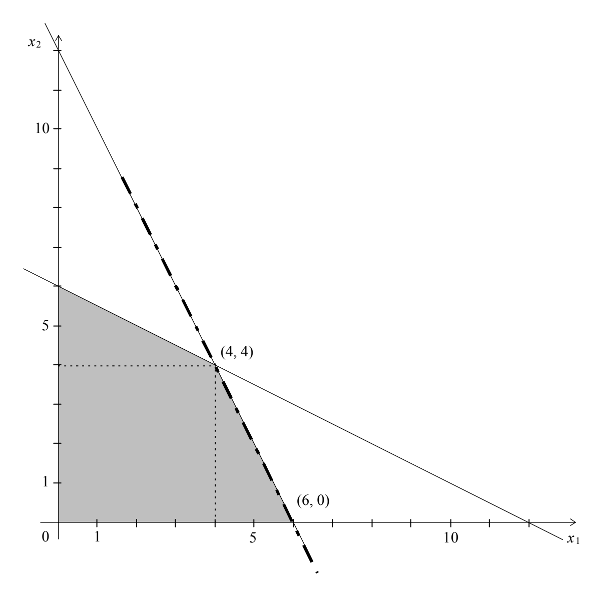


Figure 8.3 : Résolution graphique avec $c_1 = 8$

Avec $c_1 = 12$, la solution de base $x_1 = x_2 = 4$ reste réalisable, mais elle n'est plus optimale. En effet, le tableau du simplexe devient le suivant :

	c_j		12	4	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
12	$\boldsymbol{a}_1$	4	1	0	2/3	-1/3
4	$\boldsymbol{a}_2$	4	0	1	-1/3	2/3
	$(z_j - c_j)$	64	0	0	20/3	-4/3

Nous pivotons donc autour de l'élément y_{24}, ce qui nous donne le tableau suivant :

	c_j		12	4	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$
12	$\boldsymbol{a}_1$	6	1	1/2	1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_4$	6	0	3/2	-1/2	1
	$(z_j - c_j)$	72	0	2	6	0

La solution $x_1 = 6$, $x_2 = 0$ (puisque x_2 n'est plus dans la base) et $x_4 = 6$ est optimale, puisque tous les $(z_j - c_j) \geq 0$. Cette situation est illustrée par la Figure 8.4.

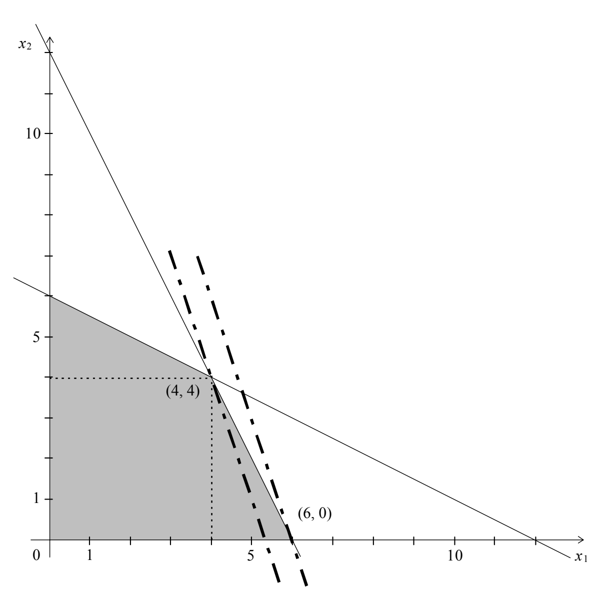


Figure 8.4 : Résolution graphique avec $c_1 = 12$

On peut résumer les solutions pour les différentes valeurs de $\boldsymbol{c}$ dans le tableau suivant :

Fonction objectif	Solution optimale
$z = 3x_1 + 4x_2$	(4 ;4)
$z = 6x_1 + 4x_2$	(4 ;4)
$z = 8x_1 + 4x_2$	pas de solution unique
$z = 12x_1 + 4x_2$	(6 ;0)

Nous constatons que, si nous ne modifions que l'accroissement de c_1, la solution du problème de base reste optimale aussi longtemps que $c_1 < 8$. Lorsque $c_1 = 8$, la solution originale reste optimale mais n'est plus unique. Dès que $c_1 > 8$, la solution originale n'est plus optimale ; l'optimum est alors atteint pour $x_1 = 6$ et $x_2 = 0$. De même, lorsque c_1 décroît et que tous les autres critères sont inchangés, la solution du problème reste optimale aussi longtemps que $c_1 > 2$. Si $c_1 < 2$, le nouvel optimum sera atteint en $x_1 = 0$ et $x_2 = 6$. Ceci peut se résumer dans le tableau suivant :

c_1	Optimum	z
$0 \leq c_1 < 2$	(0 ;6)	24
$c_1 = 2$	pas de solution unique	24
$2 < c_1 < 8$	(4 ;4)	$4c_1 + 16$
$c_1 = 8$	pas de solution unique	48
$c_1 > 8$	(6 ;0)	$6c_1$

8.2.2 Modification du vecteur des contraintes $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{b}^*$

Si l'on remplace $\boldsymbol{b}$ par $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{B}$ reste une base du nouveau problème, mais la solution de base correspondante $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^*$ peut ne plus être réalisable. Il s'agit alors de calculer une nouvelle solution.

$$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}^*) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{0})$$

Si $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* \geq \boldsymbol{0}$, alors la solution est réalisable. Et puisque $z_j^* - c_j^* \geq 0$ pour le nouveau problème (compte tenu du fait que $z_j^* - c_j^*$ ne dépend pas de $\boldsymbol{b}$), la solution $(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}^*) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{0})$ est optimale. Si une ou plusieurs composantes de $\boldsymbol{b}^*$ sont négatives, alors il faut utiliser la méthode duale du simplexe à partir de la base $\boldsymbol{B}$.

Exemple 8.2 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Max } z = & 3x_1 & +5x_2 & & & & \\
\text{s.c.} & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
 & & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\
 & x_1, ..., x_5 \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

dont la résolution est présentée au chapitre 6. L'optimum est atteint pour $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ et $z = 36$. La base associée à cette solution est :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Supposons que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 18 \end{pmatrix}'$ soit remplacé par $\boldsymbol{b}^* = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 18 \end{pmatrix}'$. Dans ce cas :

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^* = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

impliquant la faisabilité de la solution puisque $x_1,\ x_2 \geq 0$. Mais l'une des composantes de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^*$ est inférieure à zéro, ce qui nécessite dès lors l'utilisation de l'algorithme dual du simplexe, à partir du tableau suivant :

	c_j		3	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	-1	0	0	1	1/3	-1/3
5	$\boldsymbol{a}_2$	6	0	1	0	1/2	0
3	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	0	-1/3	1/3
	$(z_j - c_j)$	36	0	0	0	3/2	1

Si l'on applique la méthode duale du simplexe, la variable x_5 entre dans la base alors que la variable x_3 en sort. Lors de l'étape suivante, le tableau du simplexe dual devient alors:

	c_j		3	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_5$	3	0	0	-3	-1	1
5	$\boldsymbol{a}_2$	6	0	1	0	1/2	0
3	$\boldsymbol{a}_1$	1	1	0	1	0	0
	$(z_j - c_j)$	33	0	0	3	1/2	0

Ce tableau implique les solutions suivantes $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_5 = 3$ et $z = 33$.

Graphiquement, lorsque seuls les seconds membres des contraintes sont modifiés, les contraintes se déplacent parallèlement à elles-mêmes.

Dans notre cas, seule la première contrainte se déplace et l'ensemble des solutions réalisables se restreint. La Figure 8.5 présente la situation originale, le déplacement de la contrainte et la nouvelle situation. On remarque qu'avec la nouvelle combinaison optimale, la valeur de la troisième contrainte est inférieure au maximum possible. Cela se traduit graphiquement par le point $(x_1,\ x_2)$ situé en-dessous de la contrainte et par la variable d'écart $x_5 \neq 0$.

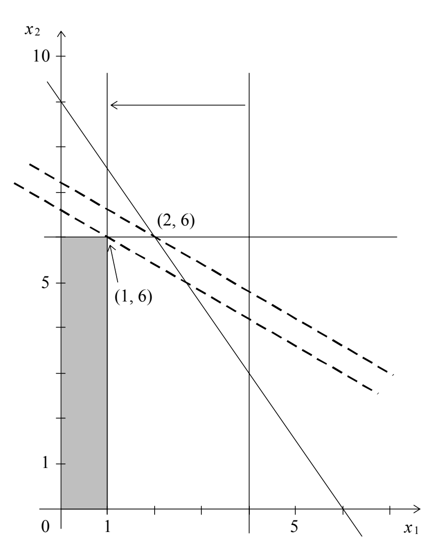


Figure 8.5 : Résolution du problème 8.2 avec $b_1 = 1$

8.2.3 Modification d'un vecteur hors-base $\boldsymbol{a}_j$ en $\boldsymbol{a}_j^*$

La solution optimale de base du programme original reste réalisable pour le problème modifié. Il s'agit de calculer les valeurs :

$$\boldsymbol{y}_j^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j^* \quad \text{et} \quad z_j^* - c_j^* = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{y}_j^* - c_j$$

Si $z_j^* - c_j^* \geq 0$, alors la solution du problème originale reste optimale pour le nouveau problème. Dans le cas contraire, on utilise l'algorithme du simplexe en commencant à partir de la base $\boldsymbol{B}$.

Notons que dans les programmes linéaires pour lesquels les procédures sont plus compliquées, des changements de nature plus générale peuvent s'effectuer dans $\boldsymbol{A}$. Dans ce type de situations, il est souvent préférable de résoudre les programmes linéaires modifiés à partir du début.

Reprenons l'exemple et supposons que $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}'$ soit remplacé par $\boldsymbol{a}_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$. Il faut dans ce cas calculer :

$$z_4^* - c_4 = \boldsymbol{c_B}^* \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_4 - c_4 = \frac{5}{2} \geq 0$$

Comme $z_4^* - c_4 > 0$, la solution originale reste optimale.

Notons que cette modification ne peut pas être représentée graphiquement, puisque le vecteur $\boldsymbol{a}_4$ se trouve en dehors de la base.

Dans le cas plus général, modifier un élément a_{ij} correspond au pivotement d'une contrainte, si aucune autre modification n'a lieu simultanément. Voyons ceci graphiquement avec l'exemple 8.1 et supposons que la deuxième contrainte du problème devienne :

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

La représentation graphique du problème modifié est présentée à la Figure 8.6. La solution $x_1 = x_2 = 4$ n'est plus réalisable, puisqu'elle ne satisfait plus la deuxième contrainte. On trouve le nouvel optimum en $x_1 = 4,8$, $x_2 = 2,4$ et $z = 24$.

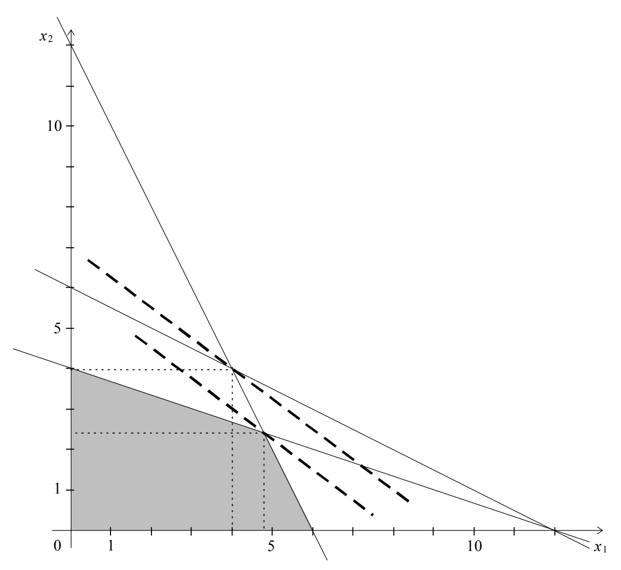


Figure 8.6 : Modification de a_{21}, nouvelle contrainte et nouvel optimum

8.3 Changements continus parmi les paramètres a_{ij}, b_j et c_j

Soit un programme linéaire de la forme :

$$\begin{array}{llcl} \text{Max} & z & = & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{Ax} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

dont la solution optimale est $\boldsymbol{x}^*$. Nous allons nous intéresser aux intervalles dans lesquels les paramètres a_{ij}, b_j et c_j peuvent varier, sans que la solution optimale ne change.

8.3.1 Changement continu de $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{c}^*$

On suppose que le vecteur des coefficients $\boldsymbol{c}$ est transformé en $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c} + \theta \boldsymbol{d}$, où $\boldsymbol{d}$ est un vecteur de changement et θ un facteur d'échelle, $\theta \geq 0$. Le nouveau coefficient réduit est :

$$\begin{aligned} z_j^* - c_j^* &= \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^* \boldsymbol{y}_j - c_j^* = (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} + \theta \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}}) \boldsymbol{y}_j - c_j - \theta d_j \\ &= z_j - c_j - \theta (d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j) \end{aligned}$$

Si $d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j \leq 0$, alors $z_j^* - c_j^* \geq z_j - c_j \geq 0$. Mais pour les indices j pour lesquels $d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j > 0$, $z_j^* - c_j^* = 0$ lorsque $\theta = \dfrac{z_j - c_j}{d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j}$.

Soit

$$\theta^{(1)} = \begin{cases} \min\limits_j \left\{ \dfrac{z_j - c_j}{d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j} \right\} & \text{si } d_j - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y}_j > 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

x_j hors base et $z^* = z + \theta \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$

Tant que $\theta \leq \theta^{(1)}$, les $z_j^* - c_j^*$ restent non-négatifs, par conséquent l'ancien ensemble de solutions réalisables reste optimal. En revanche la situation où $\theta = \theta^{(1)}$ implique qu'il existe de multiples optimums possibles. Lorsque $\theta > \theta^{(1)}$, l'optimum change ; il convient dès lors de calculer une nouvelle solution. Notons que ceci n'est vrai que s'il y a abscence de dégénérescence. Habituellement, la nouvelle solution optimale s'obtient par un pivotement à partir du tableau optimal précédent.

On répète cette procédure pour trouver le point $\theta = \theta^{(2)}$ où la nouvelle base n'est plus optimale. Généralement, on constate qu'à partir d'un certain point $\theta^{(n)} = +\infty$, la solution de base optimale ne change plus lorsque θ est augmenté en $\theta^{(n+1)}$.

Exemple 8.3 *On considère le programme linéaire de l'exemple 8.2.*

Nous avions trouvé comme solution de base optimale :

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^* = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$ Alors $\boldsymbol{d_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}'$

$$d_4 - \boldsymbol{d_B}\boldsymbol{y}_4 \quad = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$d_5 - \boldsymbol{d_B}\boldsymbol{y}_5 \quad = 0 - (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{z_5 - c_5}{d_5 - \boldsymbol{d_B}\boldsymbol{y}_5} = \frac{1}{(1/3)} = 3$$

Lorsque $\theta = \theta^{(1)} = 3$, le tableau correspond à :

	c_j		0	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	0	0	1	1/3	-1/3
5	$\boldsymbol{a}_2$	6	0	1	0	1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	0	-1/3	1/3
	$(z_j - c_j)$	30	0	0	0	5/2	0

On constate que la solution reste optimale, mais qu'elle n'est pas unique. En effet, le tableau peut être modifié en entrant la variable x_5 dans la base et en faisant sortir la variable x_1. Le nouveau tableau est alors le suivant :

	c_j		0	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	4	1	0	1	0	0
5	$\boldsymbol{a}_2$	6	0	1	0	1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_5$	6	3	0	0	-1	1
	$(z_j - c_j)$	30	0	0	0	5/2	0

Cette nouvelle solution, bien que différente, est également optimale.
La Figure 8.7 présente la solution originale ainsi que la nouvelle solution pour $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$ et différentes valeurs de θ.

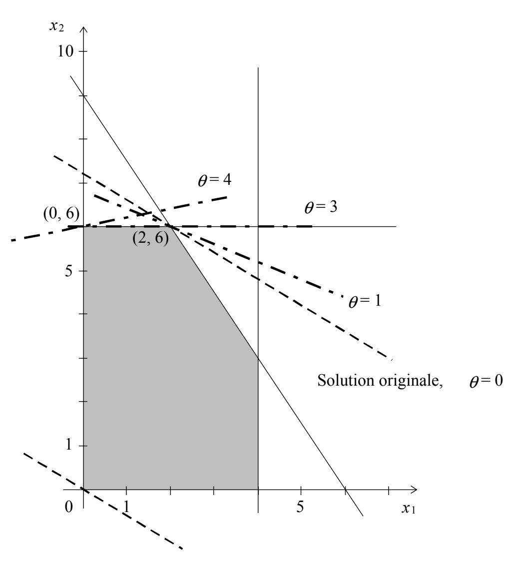


Figure 8.7 : Résolution avec différentes valeurs de θ

Considérons maintenant des accroissements supplémentaires de θ, basés sur ce tableau révisé.

$$\boldsymbol{d_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 - \boldsymbol{d_B y}_1 = -1$$

$$d_4 - \boldsymbol{d_B y}_4 = 0$$

$$\theta^{(2)} = +\infty$$

$$\theta^{(2)} = \theta^{(1)} + \theta_2 = +\infty$$

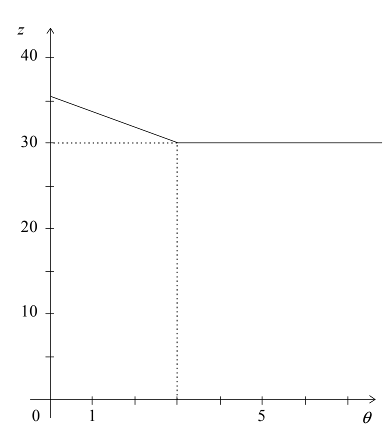


Figure 8.8 : Valeur de la fonction objectif en fonction de θ

Cela signifie que toute nouvelle augmentation de θ n'aura aucun effet. Cette argumentation peut être démontrée en représentant graphiquement θ par rapport à la valeur optimale de z (Figure 8.8). On note que si la solution optimale est un fonction discontinue de θ, alors z_{max} est une fonction linéaire continue de θ, ceci pour tout programme linéaire.

8.3.2 Changement continu de $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{b}^*$

Il s'agit ici d'évaluer le domaine de variation des éléments de $\boldsymbol{b}$, de sorte que la solution optimale soit maintenue. La procédure employée est similaire à celle présentée ci-dessus, compte tenu que les coefficients variables peuvent ici être assimilés à ceux de la fonction objectif du problème dual. Par conséquent, on applique l'algorithme de la dualité.

Soit $\boldsymbol{b}$ ayant subi un changement tel que $\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b} + \theta \boldsymbol{f}$, $\theta \geq 0$. Dans ce cas, le côté droit du programme linéaire devient :

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \theta(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})$$

Si $-\boldsymbol{B}\boldsymbol{f} \geq 0$, alors θ peut être augmenté indéfiniment sans que la solution de base courante devienne irréalisable. Mais il faut constater qu'en général, on observe une ou plusieurs composantes de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{f}$ de signe négatif. Par conséquent, θ ne peut pas être augmenté au-delà de :

$$\theta^{(1)} = \begin{cases} \min_i \left\{ \dfrac{\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right)_i}{-\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{f}\right)_i} \right\} & \text{si } -\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{f}\right)_i > 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $\theta = \theta^{(1)}$, la solution optimale est dégénérée. Le pivotement effectué selon l'algorithme dual du simplexe entraîne une nouvelle base optimale.

8.4 Changements structurels

Contrairement aux deux précédentes, cette catégorie de changement n'est pas basée sur la modification des paramètres du programme linéaire de départ, mais sur l'introduction ou la suppression de nouvelles variables ou contraintes.

8.4.1 Introduction ou suppression de variables

On désire introduire une nouvelle variable non-négative x_{n+1} dans notre modèle de départ. À partir de la solution optimale, on calcule y_{n+1} et $z_{n+1} - c_{n+1} = \boldsymbol{c_B y}_{n+1} - c_{n+1}$.

Si $z_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$, la région réalisable de la base reste la même. Sinon, on continue le pivotement par l'algorithme du simplexe.

La procédure à mener lors de la suppression d'une variable va dépendre de la place occupée par cette variable dans le tableau associé à la solution optimale. Si x_j est une variable hors base, elle prend dès lors une valeur égale à 0. Par conséquent, aucune opération n'est à effectuer puisque la région des solutions réalisables optimale reste la même. Si par contre x_j est une variable incluse dans la base, il est nécessaire de la forcer à 0 (à moins qu'elle ne soit déjà dégénérée). Pour ce faire, il faut la sortir de la base en utilisant le critère de la méthode duale du simplexe. La variable est ignorée dans la suite de la résolution, toujours suivant la méthode duale du simplexe.

Exemple 8.4 *Soit la programme linéaire de l'exemple 8.2.*

- Que se passe-t-il si la variable x_4 est supprimée?

Rien dans ce cas puisque x_4 n'est pas incluse dans la base du tableau relatif à la solution optimale.

- Que ce passe-t-il si x_1 est supprimée?

Reprenons le tableau du simplexe final.

	c_j		3	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	2	0	0	1	1/3	-1/3
5	$\boldsymbol{a}_2$	6	0	1	0	1/2	0
3	$\boldsymbol{a}_1$	2	1	0	0	-1/3	1/3
	$(z_j - c_j)$	36	0	0	0	3/2	1

La variable x_1 sort de la base et la variable x_4 y entre.

	c_j		3	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	4		0	1	0	0
5	$\boldsymbol{a}_2$	9		1	0	0	1/2
0	$\boldsymbol{a}_4$	-6		0	0	1	-1
	$(z_j - c_j)$	45		0	0	0	5/2

La variable x_5 entre dans la base et la variable x_4 en sort.

	c_j		3	5	0	0	0
$\boldsymbol{c_B}$	vecteurs de base	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
0	$\boldsymbol{a}_3$	4		0	1	0	0
5	$\boldsymbol{a}_2$	6		1	0	1/2	0
0	$\boldsymbol{a}_5$	66		0	0	-1	-1
	$(z_j - c_j)$	30		0	0	5/2	0

Il s'agit de la solution optimale.

- Que se passe-t-il si la variable x_2 est supprimée ?

Cette technique n'est pas utilisable dans ce cas puisque la ligne de x_2 est non-négative. Il faut dès lors utiliser l'algorithme du dual pour déterminer quelle variable entre dans la base.

8.4.2 Introduction ou suppression d'une contrainte

Pour introduire une nouvelle contrainte dans le tableau associé à la solution optimale, il faut la convertir, si nécessaire, sous sa forme d'égalité en introduisant une variable d'écart. On procède ensuite au pivotement de manière à rétablir la forme des colonnes de la base originale selon les critères suivants:

- si la nouvelle ligne contient des valeurs négatives, on utilise le test ratio de la méthode du dual pour déterminer quelle variable entre dans la base pour cette nouvelle ligne (pas de sortie de base).

- si la nouvelle ligne ne contient que des valeurs non négatives et que $\boldsymbol{x_B}$ est également non négatif, on utilise le test ratio de la méthode du dual pour trouver la variable qui entre dans la base

- si la nouvelle ligne ne contient que des valeurs non négatives mais que $\boldsymbol{x_B}$ est négatif, le nouveau programme linéaire n'est pas réalisable.

8.5 Exercices

1. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} & & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Résoudre ce programme par la méthode du simplexe.

   (b) Étudier les modifications de ce programme linéaire lorsque $\boldsymbol{c} = (2; 3)'$ est remplacé par $\boldsymbol{c}^* = (8; 3)'$.

2. Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Elle utilise les matières premières M_1, M_2 et M_3 selon la répartition suivante donnée en tonnes :

	P_1	P_2
M_1	1	2
M_2	4	2
M_3	2	2

   Elle dispose de 9 tonnes de M_1, 12 tonnes de M_2 et 10 tonnes de M_3 par mois.

   (a) Quelle quantité de chaque bien l'usine doit-elle produire pour maximiser son bénéfice, sachant que le bénéfice net est de 6 par unité de P_1 et de 4 par unité de P_2 (en milliers de francs).

   (b) Suite au jeu de l'offre et de la demande, le bénéfice unitaire de P_2 n'est plus que de 3. La combinaison calculée au point (a) est-elle encore optimale ?

3. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} & & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ & & x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Trouver la solution de base optimale.

(b) Trouver la nouvelle solution optimale lorsque la fonction objectif est remplacée par :

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

4. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} & & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & 3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Trouver la solution de base optimale.

(b) Trouver la nouvelle solution optimale si $\boldsymbol{b} = (8; 15)'$ est remplacé par $\boldsymbol{b}^* = (8; 21)'$.

(c) Représenter les deux situations sur le même graphique.

5. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} & & x_1 \leq 2 \\ & & x_1 + x_2 \leq 5 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Trouver la solution de base optimale.

(b) Trouver la nouvelle solution optimale si $\boldsymbol{b} = (2; 5)'$ est remplacé par $\boldsymbol{b}^* = (1; 5)'$.

6. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} & & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & & x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Trouver la solution de base optimale.

(b) Étudier la modification de la solution optimale si la deuxième contrainte est remplacée par:

$$2x_3 \leq 6$$

7. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 5x_1 + 10x_2 \\ \text{s.c.} & & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & x_2 \leq 3 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Résoudre graphiquement ce système.

(b) Représenter sur le même graphique les modifications du système et de la solution lorsque la deuxième contrainte devient :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

8. Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & & x_1 + x_2 \leq 11 \\ & & 2x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

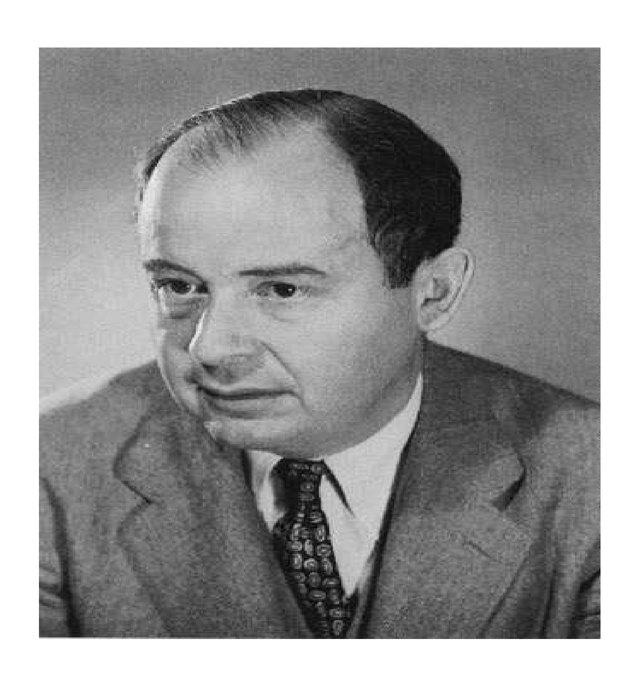
(a) Trouver la solution de base optimale de ce programme.

(b) Soit $\boldsymbol{d}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On s'intéresse aux variations des coefficients de la fonction objectif tel que $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c} + \theta\boldsymbol{d}$, $\theta \geq 0$. Trouver $\theta^{(1)}$ tel que la solution originale reste optimale mais ne soit plus unique et calculer la nouvelle base.

(c) Trouver $\theta^{(2)}$ tel que la nouvelle base ne soit plus optimale.

(d) Recommencer le point précédent jusqu'à ce que la solution optimale ne change plus quelle que soit l'augmentation de θ.

(e) Représenter graphiquement la valeur de z en fonction de θ.



VON NEUMANN Johannes (1903-1957)

Mathématicien américain d'origine hongroise, il étudie la chimie à Berlin et obtient son diplôme d'ingénieur chimiste à l'ETH de Zürich en 1926, en même temps que son doctorat à l'université de Budapest. À l'âge de 20 ans, il publie une définition des nombres ordinaux, toujours utilisée aujourd'hui. Il enseigne notamment à Berlin, Hambourg et Princeton. Von Neumann est avant tout connu pour son travail en mécanique quantique : *Principes mathématiques de la mécanique quantique (*1932) et pour sa théorie des jeux qu'il élabore en collaboration avec Oskar Morgenstein *Théorie de jeux et comportement économique* (1944). Durant les années trente, il travaille avec F. J. Murray sur les *rings operators* appelés dès lors algèbre de Von Neumann. Il fut l'un des pionniers de l'informatique en contribuant au développement de l'architecture logique des ordinateurs, en avançant la théorie du cellular automata et en proposant le bit comme mesure unique de la mémoire informatique. Durant et après la Seconde Guerre mondiale, Von Neumann devient consultant des forces armées américaines et participe notamment à l'élaboration de la bombe à hydrogène.

Chapitre 9

Problème de transport

9.1 Introduction

C'est en 1941 que Frank L. Hitchcock a formulé pour la première fois le problème de transport, qui consiste à minimiser le coût de transport total d'un plan d'expédition. Le fait de minimiser à la fois la distance totale et le coût de transport fait partie de la théorie des flux de réseaux ; il ne sera pas abordé ici. Le problème de transport "classique" est en fait un cas particulier d'un problème de flux de réseaux.

9.2 Formulation du problème de transport

On peut d'écrire un problème de transport de la façon suivante. Une quantité donnée d'un produit uniforme est disponible à chacune des origines (par exemple des dépôts). Il s'agit d'en envoyer des quantités spécifiées à chacune des destinations (par exemple des points de vente). On connaît le coût de transport d'une unité de l'une des origines vers l'une des destinations. En supposant qu'il est possible d'expédier des produits depuis n'importe quelle origine vers n'importe quelle destination, il s'agit de déterminer le coût de transport minimum des origines vers les points de destination.

Nous supposerons qu'il y a m origines et n destinations.

La variable x_{ij} représentera le nombre d'unités expédiées de l'origine i vers la destination j. $x_{ij} \geq 0$ pour tout i, j.

Pour chaque origine i donnée, il y a n valeurs de j possibles ; cela implique qu'il y a $(m \times n)$ x_{ij} différents.

On note par a_i la quantité disponible du produit à l'origine i, et par b_j la quantité requise à la destination j.

9.3 Équations

Le total reçu par chacune des destinations est la somme des quantités reçues de chaque origine. Les besoins des destinations sont satisfaits si:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{9.1}$$

Si c_{ij} est le coût de transport d'une unité de l'origine i vers la destination j, exprimé en francs, alors le coût total de l'expédition se traduit par l'équation :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ &= (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n}) + \cdots + \\ &\quad +(c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Dans le cas d'un problème de transport équilibré selon l'équation (9.1), nous devons donc résoudre le programme linéaire :

$$\text{Minimiser } z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \text{ et } j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Outre les $n \times m$ contraintes de non négativité, le premier ensemble de m contraintes garantit que la quantité envoyée depuis le dépôt i est égale au stock disponible à cette origine. L'ensemble de n contraintes garantit que chaque destination reçoit la quantité demandée.

Ceci est un problème de programmation linéaire avec $m \times n$ variables et $m + n$ contraintes.

Nous ne faisons pas la restriction $a_i, b_j \geq 0$ car les variables x_{ij} sont ≥ 0. Nous admettons cependant que les coûts c_{ij} sont négatifs. Ainsi, notre problème de transport peut aussi représenter des problèmes de maximisation car :

$$\text{Maximiser } z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

est équivalent à :

$$\text{Minimiser } z = \sum_{i,j} (-c_{ij}) x_{ij}$$

Notons encore que le problème de transport possède toujours une solution réalisable, le lecteur pourra vérifier qu'elle est donnée par :

$$x_{ij} = \tfrac{a_i b_j}{T} \qquad \forall \quad i \text{ et } j$$

où

$$T = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Les contraintes sont celles décrites ci-dessus. En outre, à cause de la non-négativité, chaque variable est bornée vers le haut et vers le bas

$$0 \leq x_{ij} \leq \min\{a_i; b_j\}$$

Ainsi, le problème ne peut pas être illimité et une solution optimale doit exister.

9.4 Exemple illustratif

Une fabrique de conserves expédie des caisses vers des dépôts. Nous voulons que le programme d'expédition des caisses minimise le coût de transport total des usines vers les dépôts. Pour simplifier, nous supposerons qu'il y a deux usines I et II et trois dépôts A, B et C. Les disponibilités en caisses dans les usines a_i et les besoins des dépôts b_j sont représentées dans le tableau 9.1.

a_i	b_j
350 caisses à l'usine I 550 caisses à l'usine II	300 caisses au dépôt A 300 caisses au dépôt B 300 caisses au dépôt C

Tableau 9.1 : Disponibilités des usines

On voit tout de suite que la condition (9.1) est vérifiée, puisque :

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 900$$

Le coût d'expédition, par caisse, entre chaque usine et chaque dépôt est consigné dans le tableau 9.2 ci-dessous.

Origines	Destinations		
	A	B	C
I	25	17	16
II	24	18	14

Tableau 9.2 : Coûts d'expédition (en francs par caisse)

Le problème consiste à déterminer le nombre de caisses que chacune des usines doit expédier vers chacun des dépôts de façon à ce que le coût de transport total soit le plus faible possible. La fonction objectif à minimiser est :

$$\text{Minimiser } z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 550 \qquad \text{(dues aux origines)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 300 \\ x_{12} + x_{22} &= 300 \\ x_{13} + x_{23} &= 300 \qquad \text{(dues aux destinations)} \end{aligned}$$

9.5 Résolution du problème

Le tableau 9.3 du problème de transport sert à exposer tous les éléments essentiels, constantes et variables, d'un problème de transport. Chaque ligne, à l'exception de la dernière, est associée à une origine, chaque colonne, à l'exception de la dernière, à une destination. Le coût unitaire c_{ij} est entré dans la partie supérieure gauche de la case, ou cellule, qui se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Par la suite, nous nous référerons à cette cellule $(i; j)$. On peut représenter une solution réalisable donnée au problème de transport en écrivant la valeur de chaque variable x_{ij} dans la partie inférieure droite de la cellule $(i; j)$. Nous déciderons par convention que, lorsqu'une solution réalisable de base est exposée dans un tableau de transport, la valeur d'un x_{ij} particulier n'y est effectivement rentrée que si et seulement si x_{ij} est dans la base. Comme les variables non-basiques (dont la valeur est zéro) ne sont pas montrées dans le tableau, l'apparition d'un ou de plusieurs zéros indique que la base est dégénérée. Finalement, les différentes offres et demandes sont respectivement inscrites dans la colonne la plus à droite et la ligne du bas. Ainsi, on peut tout de suite déterminer si une solution réalisable de base satisfait toutes les contraintes en sommant tous les x_{ij} sur les lignes et les colonnes. Les éléments $\hat{u}_i$ et $\hat{v}_i$ seront étudiés plus tard.

	$\hat{v}_1$	$\hat{v}_2$		$\hat{v}_n$	
$\hat{u}_1$	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
$\hat{u}_2$	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{u}_m$	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Tableau 9.3 : Modèle du tableau de transport

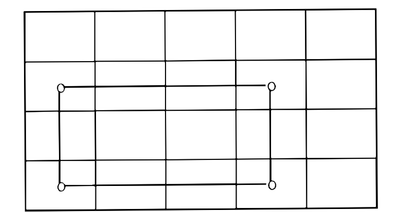
Définition 9.1 *Une séquence de quatre cellules différentes, ou plus, dans un tableau de transport est appelée une boucle, si elle possède les propriétés*

suivantes :

- *deux cellules consécutives doivent se trouver soit sur la même ligne, soit sur la même colonne.*
- *il ne doit pas y avoir trois cellules consécutives dans la même ligne ou la même colonne.*

Remarque 9.1 *La première cellule est considérée comme suivant la dernière dans la séquence.*

Les figures ci-dessous présentent deux exemples de boucles, puis deux exemples qui ne sont pas des boucles



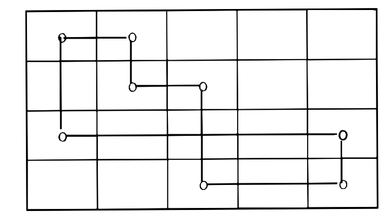
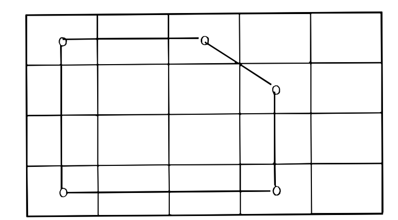


Figure 9.1 : Deux exemples de boucles



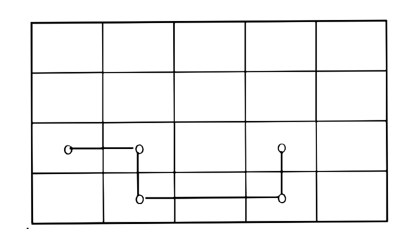


Figure 9.2 : Deux exemples qui ne sont pas des boucles

9.6 Boucles et dépendances linéaires

Dans cette section, nous allons établir les fondements théoriques du développement de l'algorithme de transport et de l'algorithme de Stepping Stone qui en dérive. Comme cela deviendra évident plus tard, cet algorithme est essentiellement une adaptation de la méthode du simplexe, qui utilise la notion de boucle pour effectuer des pivots directement sur le tableau de transport.

Nous remarquons premièrement qu'un ensemble S de cellules d'un tableau de transport est dit contenant une boucle si les cellules de S, ou un sous-ensemble parmi elles, peuvent être rangées de sorte à former une boucle. Voyons le théorème 9.1.

Théorème 9.1 *Soit S représentant un ensemble de colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$ d'un problème de transport. Les colonnes de S sont linéairement dépendantes si et seulement si leurs cellules correspondantes dans le tableau de transport contiennent une boucle.*

Il découle du théorème 9.1 qu'une solution contenant $m + n - 1$ variables réelles est une solution réalisable si et seulement si ses cellules correspondantes dans le tableau de transport ne contiennent pas de boucle.

Théorème 9.2 *Soit les colonnes $b_1, \ldots, b_{m+n-1}$, constituant une base réalisable pour le problème de transport. Dans la représentation d'une colonne non basique a_{pq} comme combinaison linéaire des vecteurs de base :*

$$a_{pq} = \sum_{k=1}^{m+n-1} Y_{kpq} b_k$$

chaque élément Y est -1, 0 ou 1.

Dans l'exposé du théorème, le symbole b_k représente la $k^{\text{ème}}$ colonne dans la base, qui est bien sûr une des colonnes a_{ij} de la matrice des contraintes.

9.7 Recherche de la solution réalisable de base initiale

- **Méthode de la matrice minimale** (Minimum Entry Method)

Étape 1 Trouver la cellule $(p; q)$, telle que c_{pq} est le plus petit coût de tout le tableau.

Étape 2 Envoyer le maximum d'unités pour la cellule $(p; q)$. Ainsi x_{pq} est initialisé comme étant le $\min\{a_p; b_q\}$. Ajuster ensuite a_p et b_q, en tenant compte du montant x_{pq} à expédier. Exprimons cette phrase à l'aide d'inégalités :

$$x_{pq} = \min\{a_p, b_q\}$$

$$\begin{array}{rcl} a'_p & = & a_p - x_{pq} \\ b'_q & = & b_q - x_{pq} \end{array} \qquad (9.3)$$

Entourer (ou mettre en évidence d'une autre manière) le coût c_{pq}. À la fin de cette étape, soit a'_p, soit b'_q est nul, soit les deux.

Étape 3

(a) Si $a'_p = 0$ et $b'_q > 0$, cela signifie que l'origine p a été "vidée". Il faut donc éliminer la ligne p du tableau.

(b) Si $b'_q = 0$ et $a'_p > 0$, cela signifie que la destination q est entièrement satisfaite et qu'il reste des marchandises dans le dépôt p. Il faut donc éliminer la colonne q du tableau.

(c) Si $a'_p = 0$ et $b'_q = 0$, nous nous trouvons dans un cas dégénéré. On élimine alors la ligne p, à moins qu'elle ne soit la seule ligne restante du tableau ; auquel cas il faut éliminer la colonne q.

Étape 4

(a) S'il reste un total de deux ou plusieurs lignes et colonnes non encore éliminées, reprendre à l'étape 1.

(b) S'il ne reste qu'une ligne non éliminée, la solution réalisable de base initiale est déterminée par les cellules entourées.

Appliquons cette méthode à notre problème de référence. Le tableau de transport initial est :

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.4 : Tableau de transport initial

Pour des raisons pratiques dues à l'utilisation d'un traitement de texte, nous utiliserons les notations suivantes pour la suite de ce travail :

- ♣ à gauche d'une ligne ou en haut d'une colonne pour montrer que cette ligne ou cette colonne a été éliminée ;
- □ pour montrer qu'une cellule $(p;q)$ fait partie de la base ;
- ♭ pour mettre en évidence la nouvelle valeur de a_p ou b_q.

Étape 1 La cellule $(p;q)$ choisie est la cellule (2 ;3) dont le coût (14) est le plus petit de l'ensemble du tableau.

Étape 2 Calculons x_{23}, a'_2 et b'_3.

$$\begin{aligned} x_{23} &= \min\{550;300\} = 300 \\ a'_2 &= a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250 \\ b'_3 &= b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 Comme $a'_2 = 250$ et $b'_3 = 0$, il faut éliminer la colonne 3.

Étape 4 Il reste deux lignes (1 et 2) et deux colonnes (1 et 2), il faut donc choisir un nouvel x_{pq} qui entrera à son tour dans la solution réalisable de base initiale.

Rédigeons d'abord le tableau après cette première itération.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3 ♣	
1	25	17	16	350
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
Demande	300	300	300 ♭ 0	900

Tableau 9.5 : Tableau après la première itération

Reprenons nos calculs à l'étape (1) avec un tableau réduit aux lignes 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2.

Étape 1 Le coût minimum sur ce tableau est 17, soit celui de la cellule (1 ;2) ; on va donc initialiser x_{12}.

Étape 2

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{350; 300\} = 300$$
$$a_1' = a_1 - x_{12} = 350 - 300 = 50$$
$$b_2' = b_2 - x_{12} = 300 - 300 = 0$$

Origines	Destinations			Offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1	25	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
Demande	300	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.6 : Tableau après l'étape 2

Étape 3 $a_1' = 50$ et $b_2' = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2. Comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, nous cherchons alors le troisième x_{pq} à entrer dans la base.

Étape 1 Le coût minimum sur la ligne 1, la ligne 2 et la colonne 1 est 24, soit le coût de la cellule (2 ;1).

Étape 2

$$x_{21} = \min\{a_2; b_1\} = \min\{250; 300\} = 250$$
$$a_2' = a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0$$
$$b_1' = b_1 - x_{21} = 300 - 250 = 50$$

Étape 3 $a_2' = 0$ et $b_1' = 50$, on élimine donc la ligne 2.

Étape 4 Il reste une ligne (1) et une colonne (1), il faut donc procéder à une quatrième itération.

Origines	Destinations			Offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1	25	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2 ♣	24 □ 250	18	14 □ 300	550 ♭ 0
Demande	300 ♭ 50	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.7 : Tableau après la troisième itération

Étape 1 Le seul x_{pq} qui peut encore entrer dans la base est x_{11}.

Étape 2

$$\begin{aligned} x_{11} &= \min\{a_1; b_1\} = \min\{50; 50\} = 50 \\ a'_1 &= a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0 \\ b'_1 &= b_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 $a'_1 = 0$ et $b'_1 = 0$, la ligne 1 est la dernière des lignes, on élimine donc la colonne 1.

Étape 4 Il ne reste que la ligne 1, nous avons donc terminé !

Origines	Destinations			Offre
	1 ♣	2 ♣	3 ♣	
1 ♣	25 □ 50	17 □ 300	16	350 ♭ 0
2 ♣	24 □ 250	18	14 □ 300	550 ♭ 0
Demande	300 ♭ 0	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.8 : Tableau après la quatrième itération

À l'aide de cet exemple, nous pouvons vérifier les affirmations formulées précédemment. Tout d'abord, en raison de la redondance, on trouve une

solution réalisable de base initiale avec $(m+n-1)$ variables, ici $2+3-1=4$. Ensuite, à chaque itération, une seule contrainte est satisfaite, ce qui se voit facilement sur le tableau. La dernière contrainte est automatiquement satisfaite à la dernière itération ; donc, si après la quatrième itération l'une des origines ou des destinations avait eu une valeur non-nulle, cela aurait signifié qu'il n'existe pas de solution réalisable.

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300) \\ &= 16\ 550 \end{aligned}$$

Il ne s'agit pas encore du coût minimum ; il sera déterminé lors de la recherche de la solution réalisable optimale.

- **Méthode du coin nord-ouest** (Northwest Corner Rule)

De même que la méthode que nous verrons plus loin, cette méthode ne diffère de la précédente que par le critère appliqué à l'étape (1), exposée ici, les étapes (2), (3) et (4) restant les mêmes. Nous présenterons les calculs complets des différentes itérations, ainsi que les tableaux obtenus. De cette manière, le lecteur pourra juger des différences entre chacune des méthodes.

Étape 1 Localiser la cellule $(p; q)$ qui se trouve dans le coin nord-ouest, c'est-à-dire en haut à gauche, de la partie non-éliminée du tableau de transport.

Voyons immédiatement à l'aide de notre exemple quels sont les résultats obtenus. Nous repartons du tableau initial.

	Destinations			Offre
Origines	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.9 : Tableau initial

Étape 1 Le tableau restant se compose de deux lignes et de trois colonnes ; son coin nord-ouest est la cellule (1 ;1), x_{11} entre donc dans la base.

Étape 2

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{350; 300\} = 300$$
$$a'_1 = a_1 - x_{11} = 350 - 300 = 50$$
$$b'_1 = b_1 - x_{11} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 $a'_1 = 50$ et $b'_1 = 0$, on élimine donc la colonne 1.

Étape 4 Il nous reste deux lignes et deux colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

	Destinations			Offre
Origines	1 ♣	2	3	
1	25 □ 300	17	16	350 ♭ 50
2	24	18	14	550
Demande	300 ♭ 0	300	300	900

Tableau 9.10 : Tableau après la première itération

Étape 1 Le tableau restant se compose des lignes 1 et 2 ainsi que des colonnes 2 et 3 ; son coin nord-ouest est donc le cellule (1 ;2).

Étape 2

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{50; 300\} = 50$$
$$a'_1 = a_1 - x_{12} = 50 - 50 = 0$$
$$b'_2 = b_2 - x_{12} = 300 - 50 = 250$$

Étape 3 $a'_1 = 0$ et $b'_2 = 250$, on élimine donc la ligne 1.

Étape 4 Il reste une ligne et deux colonnes, il faut donc reprendre la démarche à l'étape (1) afin d'opérer une troisième itération.

Origines	Destinations 1 ♣	2	3	Offre
1 ♣	25 □ 300	17 □ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18	14	550
Demande	300 ♭ 0	300 ♭ 250	300	900

Tableau 9.11 : Tableau après la deuxième itération

Étape 1 Le tableau est maintenant constitué des colonnes 2 et 3 et de la ligne 2, son coin nord-ouest est donc la cellule (2 ;2).

Étape 2

$$x_{22} = \min\{a_2; b_2\} = \min\{550; 250\} = 250$$
$$a'_2 = a_2 - x_{22} = 550 - 250 = 300$$
$$b'_2 = b_2 - x_{22} = 250 - 250 = 0$$

Étape 3 $a'_2 = 300$ et $b'_2 = 0$, on élimine donc la colonne 2.

Étape 4 Comme il reste une ligne et une colonne, une quatrième itération est nécessaire.

Origines	Destinations			Offre
	1 ♣	2 ♣	3	
1 ♣	25 □ 300	17 □ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18 □ 250	14	550 ♭ 300
Demande	300 ♭ 0	300 ♭ 0	300	900

Tableau 9.12 : Tableau après la troisième itération

Étape 1 Il ne reste que la ligne 2 et la colonne 3, donc le coin nord-ouest est la cellule (2 ;3).

Étape 2

$$x_{23} = \min\{a_2; b_3\} = \min\{300; 300\} = 300$$
$$a'_2 = a_2 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$
$$b'_3 = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

Étape 3 $a'_2 = 0$ et $b'_3 = 0$, la ligne 2 est la dernière ligne, on élimine donc la colonne 3.

Étape 4 Il ne reste que la ligne 2, la solution réalisable de base initiale est trouvée.

Origines	Destinations 1 ♣	Destinations 2 ♣	Destinations 3 ♣	Offre
1 ♣	25 □ 300	17 □ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18 □ 250	14 □ 300	550 ♭ 0
Demande	300 ♭ 0	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.13 : Tableau après la quatrième itération

Nous pouvons calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$z = 25(300) + 17(50) + 18(250) + 14(300) = 17\ 050$$

On voit tout de suite que la solution trouvée n'est pas optimale. En effet, le coût total de ce plan de transport est plus élevé que celui trouvé à l'aide de la méthode de la matrice minimale, qui était de 16 550.

- **Méthode de Vogel** (Vogel's Approximation Method)

Cette méthode est assez proche de celle dite de la matrice minimale, mais elle est un peu plus élaborée.

Le critère de choix de x_{pq} est en apparence un peu plus compliqué, mais il est par contre efficace. Le reste de la démarche ne change pas comme nous l'avions déjà signalé ci-dessus. Ce critère est le suivant :

pour chaque ligne ($i = 1, \ldots, m$) restant dans le tableau, trouver dans des colonnes non éliminées le plus petit coût et le second plus petit ; calculer leur différence. Procéder de même pour les colonnes.

On choisit ensuite la cellule $(p; q)$, dont le coût est minimum dans la ligne ou la colonne déterminée par une différence de coûts maximum.

Si des lignes ou des colonnes ont une différence de coûts égale, alors on choisit la ligne ou la colonne en utilisant l'ordre de préférence suivant :

ligne 1, ligne 2,. . ., ligne m, colonne 1, colonne 2,. . ., colonne n.

Voyons, itération par itération, les résultats obtenus pour notre exemple. Comme précédemment nous présenterons des tableaux à chacune des itérations, en repartant comme il se doit d'un tableau vide.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.14 : Tableau initial

Étape 1 Pour la ligne 1, les deux coûts les plus bas sont 16 et 17, leur différence est 1.

Pour la ligne 2, on prend 14 et 18, la différence est 4.

Pour la colonne 1, la différence est 1.

Pour la colonne 2, la différence est 1.

Pour la colonne 3, la différence est 2.

La différence maximale est celle de la ligne 2 (elle est égale à 4), on cherche donc sur la ligne 2 quel est le coût minimal. Il s'agit de 14, c_{23}. Alors $x_{pq} = x_{23}$.

Étape 2

$$\begin{aligned} x_{23} &= \min\{a_2; b_3\} = \min\{550; 300\} = 300 \\ a'_2 &= a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250 \\ b'_3 &= b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 $a'_2 = 250$ et $b'_3 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 3.

Étape 4 Il reste deux lignes (1 et 2) et deux colonnes (1 et 2), il faut donc choisir un nouveau x_{pq} qui entrera à son tour dans la solution réalisable de base initiale.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3 ♣	
1	25	17	16	350
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
Demande	300	300	300 ♭ 0	900

Tableau 9.15 : Tableau après la première itération

Reprenons donc nos calculs à l'étape (1) avec un tableau réduit aux lignes 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2.

Étape 1 La différence maximale est obtenue pour la ligne 1 ; elle est égale à 8. Le coût minimum de cette ligne est 17, celui de la cellule (1 ;2) ; on va donc initialiser x_{12}.

Étape 2

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{350; 300\} = 300$$
$$a'_1 = a_1 - x_{12} = 350 - 300 = 50$$
$$b'_2 = b_2 - x_{12} = 300 - 300 = 0$$

Origines	Destinations			Offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1	25	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
Demande	300	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.16 : Tableau après la deuxième itération

Étape 3 $a'_1 = 50$ et $b'_2 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2.

Étape 4 Comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, on cherche alors le troisième x_{pq} à entrer dans la base.

On revient à l'étape 1 pour la troisième itération.

Étape 1 $x_{pq} = x_{11}$ entre dans la base, car la différence de la première ligne est 25, celle de la deuxième ligne 24 et celle de la première colonne 1.

Étape 2

$$\begin{aligned} x_{11} &= \min\{a_1; b_1\} = \min\{50; 300\} = 50 \\ a'_1 &= a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0 \\ b'_1 &= b_1 - x_{11} = 300 - 50 = 250 \end{aligned}$$

Étape 3 $a'_1 = 0$ et $b'_1 = 250$, on élimine donc la ligne 1.

Étape 4 Il reste la ligne 2 et la colonne 1, une quatrième itération est nécessaire.

Origines	Destinations			Offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1 ♣	25 □ 50	17 □ 300	16	350 ♭ 0
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
Demande	300 ♭ 250	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Tableau 9.17 : Tableau après la troisième itération

On revient à l'étape 1 par la quatrième itération.

Étape 1 Il ne reste que la cellule (2 ;1) qui se trouve à la fois sur une ligne et une colonne non-éliminées.

Étape 2

$$\begin{aligned} x_{21} &= \min\{a_2; b_1\} = \min\{250; 250\} = 250 \\ a'_2 &= a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0 \\ b'_1 &= b_1 - x_{21} = 250 - 250 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 $a'_2 = 0$ et $b'_1 = 0$, on élimine donc la colonne 1, puisque la ligne 2 est la dernière des lignes.

Étape 4 Il reste une ligne (2), nous avons donc terminé.

Origines	Destinations			Offre
	1 $\clubsuit$	2 $\clubsuit$	3 $\clubsuit$	
1 $\clubsuit$	25 $\Box$ 50	17 $\Box$ 300	16	350 $\flat$ 0
2	24 $\Box$ 250	18	14 $\Box$ 300	550 $\flat$ 0
Demande	300 $\flat$ 0	300 $\flat$ 0	300 $\flat$ 0	900

Tableau 9.18 : Tableau après la quatrième itération

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ &= 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300) = 16\ 550 \end{aligned}$$

On obtient par hasard la même solution réalisable de base initiale qu'avec la première méthode proposée. Ceci est à considérer comme une exception due aux dimensions réduites du problème choisi comme exemple.

9.8 Remarques

Les trois méthodes exposées ci-dessus sont équivalentes. Cependant, les résultats obtenus ne le sont pas. La méthode du coin nord-ouest est celle qui demande le moins de temps pour trouver la solution réalisable de base initiale, car son critère de choix à l'étape (1) est très simple. En revanche, elle ne donne en général pas une “bonne” solution de départ ; le coût total du plan de transport généré étant assez éloigné de l'optimum. On le remarque déjà pour notre petit problème.

Les deux autres méthodes exigent davantage de temps de calcul, leur étape (1) étant plus longue. En revanche, elles donnent de meilleurs résultats. Le surcroît de temps nécessaire pour trouver la solution réalisable de base initiale est compensé par la suite, car on arrive plus rapidement à la solution optimale. On considère que la méthode Vogel donne les meilleurs résultats.

9.9 Optimisation de la solution

Nous allons maintenant étudier un algorithme permettant de trouver la solution réalisable de base optimale. Cet algorithme utilise la propriété des boucles.

- **Algorithme Stepping Stone**

Comme dans la méthode du simplexe, il s'agit de faire entrer un nouvel élément, représenté par sa cellule $(p;r)$, dans le tableau, c'est-à-dire dans la base, et d'en faire sortir un autre.

À partir de la solution réalisable de base initiale que nous avons obtenue par la méthode de la matrice minimale, essayons de voir quel effet l'introduction de la cellule (2 ;2), puis de la cellule (1 ;3) dans la base peut avoir sur la fonction objectif. La quantité de marchandises “expédiée” pour cette cellule sera représentée par la lettre s.

En partant du tableau final obtenu par la méthode de la matrice minimale (tableau 9.8), on introduit une nouvelle cellule avec un montant s. Il faudra faire les corrections suivantes sur la base initiale en parcourant la boucle (le sens de parcours peut se choisir de manière arbitraire) : soustraire s à la cellule adjacente sur la boucle ; additionner s à la cellule suivante sur la boucle. Continuer ainsi alternativement jusqu'à la fin de la boucle.

Représentons sur un tableau simplifié l'introduction de la cellule (2 ;2).

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25 $50+s$	17 $300-s$	16	350
2	24 $250-s$	18 s	14 300	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.19 : Introduction de la cellule (2 ;2)

Notons que toutes ces opérations ne changent en rien les montants disponibles aux origines ni les montants demandés aux destinations. Il est évident que s doit être positif, donc les expressions $250 - s$ et $300 - s$ doivent, toutes deux, être non-négatives. Ainsi, l'éventail des valeurs possibles pour s est $0 \leq s \leq 250$.

Voyons l'effet obtenu sur la fonction objectif ; z avait auparavant la valeur suivante :

$$z = 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300)$$

Il vaut maintenant :

$$z = 25(50 + s) + 17(300 - s) + 24(250 - s) + 14(300) + 18s$$

La différence est donc :

$$18s - 24s + 25s - 17s = +2s$$

Ainsi, comme $s > 0$, z augmentera de $2s$; on n'améliore pas la solution initiale en introduisant la cellule (2 ;2) dans la base.

Reprenons le même raisonnement pour l'introduction de la cellule (1 ;3) dans la base.

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25 50-s	17 300	16 s	350
2	24 250+s	18	14 300-s	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.20 : Introduction de la cellule (1 ;3)

Les valeurs possibles pour s sont $0 \leq s \leq 50$.
L'effet sur z est $16s - 25s + 24s - 14s = s$.
Il n'est pas non plus optimal d'introduire la cellule (1 ;3) dans la base.

Avant de formaliser ce que nous venons de voir, rappelons-nous brièvement la notion de boucle, vue précédemment dans la section (9.5).

Une boucle est définie par les deux critères suivants :

(a) deux cellules consécutives doivent se trouver soit sur la même ligne, soit sur la même colonne,

(b) trois cellules consécutives ne doivent pas se trouver dans la même ligne ou la même colonne.

De plus, la solution réalisable de base ne forme jamais une boucle ; il faut introduire une nouvelle cellule, qui, elle, permettra de former une boucle avec au moins trois cellules de base.

Définition 9.2 *La valeur d'une boucle, ou évaluation d'une cellule, est déterminée de la façon suivante :*

soit $B(p;q)$ la boucle unique formée lorsque la cellule $(p;q)$ est introduite dans la base. En partant de $(p;q)$, dans l'une ou l'autre des directions, nous parcourons la boucle en nommant alternativement les cellules soit recevantes, soit cédantes, le tout en considérant $(p;q)$, comme cellule recevante. La valeur de $B(p;q)$, notée $v(p;q)$ est obtenue en additionnant les coûts des cellules recevantes et en soustrayant les coûts des cellules cédantes.

Dans notre exemple, la boucle associée à la cellule (2 ;2) est formée par les cellules (2 ;2), (2 ;1), (1 ;1) et (1 ;2). Elles sont nommées alternativement, recevante, cédante, recevante, cédante.

Ainsi la valeur de cette boucle est :

$$v(2;2) = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} = 18 - 24 + 25 - 17 = 2$$

Lorsqu'il faudra choisir les cellules candidates pour entrer dans la base, on sélectionnera celles dont la valeur de boucle associée est négative. Ensuite, on peut appliquer une démarche analogue à celle de la phase 2 du simplexe, à savoir choisir la cellule associée à la valeur de la boucle la plus négative.

Voyons maintenant la méthode à suivre pour opérer le changement de base. Les seuls changements à faire concernent les cellules de la base incluses dans la boucle avec la cellule candidate sélectionnée.

Soit x'_{pq}, le montant à déterminer pour la cellule $(p; q)$ entrant dans la base, x_{ij} les montants des cellules dans la base avant le changement et x'_{ij} les montants après le changement de base.

Voici la méthode pour faire entrer une cellule candidate:

(a) $x'_{pq} = \min x_{ij}$ des cellules cédantes de la boucle associée à $(p; q)$;

(b) pour les cellules recevantes $x'_{ij} = x_{ij} + x'_{pq}$,
pour les cellules cédantes $x'_{ij} = x_{ij} - x'_{pq}$;

(c) la cellule $(p; q)$ est introduite dans la base et la cellule $(i; j)$ cédante avec x_{ij} minimum est sortie de la base.

Définition 9.3 *Un problème de transport est dit non dégénéré si pour toute solution réalisable de base nous avons $x_{ij} > 0$ pour les $m + n - 1$ cellules de la base correspondante.*

Le théorème 9.3 est à la base de l'algorithme Stepping Stone.

Théorème 9.3 *Supposons qu'une solution réalisable de base d'un problème de transport est telle que les valeurs de boucle associée à toutes les cellules hors de la base sont non-négatives. Alors la solution réalisable de base est optimale.*

Il est possible d'exprimer ce théorème différemment.

Théorème 9.4 *Soit une solution réalisable de base donnée d'un problème de transport non dégénéré. Supposons que pour l'une des cellules hors de la base, la valeur de boucle soit négative. Alors l'introduction d'une telle cellule dans la base permettra de former une nouvelle solution réalisable de base, pour laquelle le coût total de transport sera inférieur à celui de la solution actuelle, qui n'est donc pas optimale.*

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour formuler l'algorithme Stepping Stone.

Étape 1 Établir le tableau de transport initial.

Étape 2 Utiliser l'une des méthodes de calcul vues dans la section 9.7, pour obtenir une solution réalisable de base initiale.

Étape 3 Calculer les valeurs de boucles associées aux cellules hors de la base.

(a) Si toutes ces valeurs sont non-négatives, la procédure est achevée, la solution réalisable de base courante est optimale.

(b) Si, pour une cellule hors de la base, on obtient une valeur de boucle négative, celle-ci est candidate pour entrer dans la base ; passer alors à la phase 4.

Étape 4 Introduire une cellule candidate $(p;q)$ dans la base à l'aide de la méthode d'entrée. Reprendre ensuite à l'étape 3.

Appliquons cet algorithme à notre exemple.

Étape 1

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.21 : Tableau de transport initial

Étape 2 À l'aide de la méthode du coin nord-ouest, nous avions obtenu la solution réalisable de base initiale suivante :

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	25 ☐ 300	17 ☐ 50	16 (3)	350
2	24 (-2)	18 ☐ 250	14 ☐ 300	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.22 : Solution réalisable de base initiale

Étape 3 Calculons maintenant les valeurs de boucles pour les cellules hors de la base (1 ;3) et (2 ;1).

$$\begin{aligned} v(1;3) &= c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 16 - 14 + 18 - 17 = 3 \\ v(2;1) &= c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 24 - 25 + 17 - 18 = -2 \end{aligned}$$

Ces valeurs sont du reste reportées dans le tableau ci-dessus, à l'endroit réservé aux x_{ij}. C'est ainsi que l'on procédera lors de tout calcul fait à la main. On remarque que $v(2;1) < 0$; par conséquent, la solution actuelle n'est pas optimale.

Étape 4 On peut améliorer la solution en faisant entrer (2 ;1) dans la base. Opérons donc le changement de base tel qu'il est décrit dans la méthode d'entrée.

(a) $x'_{21} = \min\{x_{11}, x_{22}\} = \min\{300; 250\} = 250$

(b) $x'_{12} = x_{12} + x'_{21} = 50 + 250 = 300$
$x'_{11} = x_{11} - x'_{21} = 300 - 250 = 50$
$x'_{22} = x_{22} - x'_{21} = 250 - 250 = 0$

(c) La cellule (2 ;1) entre dans la base ; la cellule (2 ;2) en sort.

Voici le tableau obtenu après le changement de base :

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	25 □ 50	17 □ 300	16 (1)	350
2	24 □ 250	18 (2)	14 □ 300	550
Demande	300	300	300	900

Tableau 9.23 : Tableau après la première itération

Le calcul des valeurs de boucle pour (1 ;3) et (2 ;2) nous a permis d'obtenir les résultats reportés dans le tableau 9.23. On voit que $v(1;3) = 1$ et $v(2;2) = 2$. Comme toutes deux sont non-négatives, la solution actuelle est la solution réalisable de base optimale du problème.

Une remarque concernant la boucle $b(1;3)$ s'impose. La cellule (1 ;2) ne fait en aucun cas partie de cette boucle, par conséquent, il n'y a pas trois cellules consécutives sur la ligne 1, contrairement à ce que l'on pourrait croire. Lors de la recherche d'une boucle, on peut ignorer toute cellule de base unique sur une ligne ou une colonne.

Revenons à notre solution ; nous remarquons qu'elle est la même que la solution réalisable de base initiale trouvée, soit par la méthode de la matrice

minimale, soit par la méthode Vogel, pour lesquelles $z = 16\,550$. Ceci montre, sur ce petit problème, que ces deux méthodes sont plus efficaces que celle du coin nord-ouest. Il est bien clair que pour des problèmes plus grands que celui envisagé ici, ni la méthode de la matrice minimale, ni la méthode Vogel ne donnent directement la solution réalisable de base optimale.

9.10 Exercices

1. Trouver la solution réalisable de base initiale du problème donné ci-dessous par son tableau à l'aide des trois méthodes exposées (matrice minimale, coin nord-ouest et Vogel) et comparer les résultats.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	26	23	10	61
2	14	13	21	49
3	16	17	29	90
Demande	52	68	80	

2. Optimiser la solution réalisable de base donnée par la méthode du coin nord-ouest dans l'exercice 1.

3. Dire si la solution donnée dans le tableau ci-dessous est optimale.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	11 400	10 100	23	500
2	22	12 300	13 100	400
3	9	15	8 300	300
Demande	400	400	400	1200

4. Résoudre le problème de transport suivant, donné par son tableau initial, en utilisant la méthode du coin nord-ouest pour trouver la solution réalisable de base initiale et l'algorithme de Stepping Stone pour calculer la solution réalisable de base optimale.

Origines	Destinations			Offre
	1	2	3	
1	12	9	7	350
2	15	22	21	400
3	23	17	11	220
Demande	500	300	170	970

5. Résoudre le problème suivant donné sous forme matricielle en utilisant la méthode de votre choix.

$$\begin{aligned} \textit{Minimiser } z &= c'x \\ \textit{sous contraintes} \quad & Ax = b \\ \textit{et} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

où

$c = (4; 3; 9; 10; 2; 7; 6; 8; 11; 9; 7; 5; 4; 6; 8; 12; 11; 5; 7; 9)$
$m = 4, \quad n = 5$ et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 200 \\ 250 \\ 100 \\ 200 \\ 150 \\ 170 \\ 130 \end{pmatrix}$$



KANTOROVICH Leonid Vitalyevich (1912-1986)

Leonid V. Kantorovich obtint son doctorat en mathématiques à l'Université de Leningrad en 1930, à l'âge de 18 ans. Il devint professeur dans cette même université en 1934, un poste qu'il occupa jusqu'en 1960. De 1961 à 1971, il dirigea le département de mathématiques et d'économie de la branche sibérienne de l'Académie Soviétique des Sciences, puis de 1971 à 1976, le laboratoire de recherche de l'Institut de Planification économique nationale à Moscou.

Kantorovich recevit en 1975 le prix Nobel d'économie pour ses travaux sur l'allocation optimale des ressources rares.

Il fut un pionnier de l'utilisation de la programmation linéaire dans la planification économique et développa, dès 1939, un modèle de programmation linéaire pour démontrer comment la décentralisation de la prise de décision dans un système d'économie planifiée dépend de la relative rareté des ressources.

Chapitre 10

Épilogue

10.1 Historique

Pendant la Seconde Guerre mondiale, des équipes de chercheurs anglais, et plus tard américains, ont rencontré de nombreux problèmes de programmation linéaire liés au domaine militaire (même s'ils n'étaient pas reconnus comme tels). Peu après la guerre, l'U.S. Air Force a réuni un groupe de savants afin d'enquêter sur l'application possible des techniques mathématiques aux problèmes de programmation militaires portant sur le budget et la planification. La logique militaire était un domaine de recherche particulièrement important. George Dantzig, membre de ce groupe de recherche, avait déjà proposé que les relations entre les activités d'une grande organisation soient considérées comme modèle de programmation linéaire et que le programme, ou solution, optimal soit déterminé en minimisant une seule fonction objectif linéaire. Ses idées ont conduit l'Air Force à créer une équipe baptisée SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs), qui a commencé son travail en juin 1947. La même année, Dantzig et ses collègues avaient développé non seulement un modèle mathématique initial du problème de programmation linéaire générale, mais également une méthode générale de résolution de programme linéaire, qui fut désignée sous le nom de méthode du simplexe.

L'intérêt pour la programmation linéaire s'est rapidement répandu chez les mathématiciens, les économistes, les chercheurs et le personnel des organisations gouvernementales. Durant l'été 1949, soit deux ans seulement après le développement de la méthode du simplexe, une conférence sur la

programmation linéaire fut organisée sous le parrainage de la Cowles, la Commission de Recherche en Économie. Les articles présentés lors de cette conférence furent publiés dans le texte "*Activity Analysis of Production and Allocation*".

Les premières applications de la programmation linéaire concernèrent principalement trois domaines:1) le secteur militaire (tel le projet SCOOP), 2) l'économie inter-industrielle selon le modèle input-output de Leontief, 3) les relations entre la programmation linéaire et les jeux à somme nulle et à deux personnes.

Plus récemment, l'accent a été mis sur les problèmes rencontrés dans les domaines de l'environnement, des transports, de l'énergie, des services sociaux et de l'industrie en général.

Le développement de la programmation linéaire, en particulier de la méthode du simplexe, constituait "un grand pas" dans sa représentation de modèles et dans sa capacité à résoudre les problèmes. Cependant, la programmation n'aurait peut-être reçu que très peu d'attention si elle ne s'était pas développée à une période très favorable. En 1946, l'ordinateur digital à grande échelle était une réalité pratique à l'Université de Pennsylvanie, soit à peine un an avant le développement de la méthode du simplexe. Sans l'ordinateur digital, cette méthode n'aurait eu qu'un intérêt purement académique.

La méthode du simplexe ne comptent que quelques étape qui exigent les opérations mathématiques les plus simples - des opérations qu'un ordinateur digital peut facilement réaliser. La seule difficulté inhérente à cette méthode est d'ordre pratique : bien que les étapes soient simples et faciles, elles doivent être répétées de nombreuses fois avant d'obtenir une réponse. C'est cette répétition qui empêche toute résolution à la main (à part pour les petits problèmes). Cependant, l'ordinateur digital peut facilement et efficacement mener à bien ce processus répétitif, de ce fait la méthode du simplexe et l'ordinateur digital constituent un moyen pratique de résoudre maints grands problèmes quotidiens.

La première résolution d'un problème de programmation linéaire a eu lieu en janvier 1952 sur l'ordinateur du Bureau National de Standards SEAC. En 1953, des ordinateurs étaient disponibles sur le marché. Dans le même temps, journaux et magazines populaires commencèrent à populariser l'extrême efficacité de ce nouveau système. Aujourd'hui, presque tous les ordinateurs sont équipés de systèmes de programmation linéaire.

Après le développement de l'algorithme du simplexe de Dantzig, beau-

coup de chercheurs ont estimé qu'on ne pourrait pas aller plus loin dans le problème de programmation linéaire générale. Pourtant, d'autres analystes ont découvert une procédure plus efficace au niveau du calcul. Ceux-ci se sont probablement inspirés du travail de Klee et Minty (1972) qui ont montré, à l'aide d'un exemple volontairement complexe, que l'algorithme du simplexe peut impliquer une croissance exponentielle en temps "de calcul". Par conséquent, les chercheurs se sont à nouveau intéressés au développement d'un algorithme à temps polynômial. Il faut insister sur le fait que l'intérêt de ces algorithmes polynômiaux est d'abord d'ordre académique car, dans la pratique, l'algorithme du simplexe implique un temps polynômial de calcul assez bas.

En 1979, un candidat au doctorat soviétique, L.-G. Khachian (ou Khachiyan) présenta le développement d'un véritable algorithme à temps polynômial pour la programmation linéaire. L'écho de cette découverte fut considérable, au point que l'algorithme fit la couverture du *New York Times* (le 27 novembre 1979), ainsi que de plusieurs autres journaux. L'algorithme de Khachian était non seulement salué comme le remplaçant potentiel de l'algorithme du simplexe, mais certains pensaient également qu'il allait bientôt permettre de résoudre des problèmes de calcul difficiles avec des fonctions non-linéaires aussi bien que des variables entières.

En 1984 Karmarkar se penche sur les méthodes de points intérieurs et découvre un algorithme en temps polynômial. Son travail donne un véritable élan à la recherche d'algorithmes pour la programmation linéaire. C'est alors qu'est née toute une famille d'algorithmes dits de **points intérieurs**. Ce type d'algorithmes permet de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire et non-linéaire. Contrairement à la méthode du simplexe qui procède de sommets (points extrêmes, voir chapitres précédents) en sommets d'un polyèdre, les méthodes de points intérieurs s'intéressent à l'intérieur des domaines réalisables. En partant d'une région (suffisamment grande) contenant l'ensemble des solutions, il s'agit de rétrécir ce domaine pour cibler la solution. Ainsi, pas après pas, le domaine réalisable se restreint jusqu'à se réduire à un voisinage arbitrairement petit de la solution.

L'algorithme de Khachian (1979) et l'algorithme de Karmarkar (1984) furent les pionniers de ces nouvelles méthodes à temps polynômial de calcul. Un nouvel avenir se présenta alors à la programmation mathématique.

L'objectif de ce chapitre est de donner un bref résumé de l'algorithme de Shor et Khachian, connu sous le nom de algorithme de l'ellipsoïde (AE),

ainsi que de présenter une version de l'algorithme de Karmarkar spécialement étudiée pour les problèmes linéaires.

10.2 Algorithme de Khachian

Il est important de savoir que la méthode du simplexe n'est pas la seule approche possible lorsque l'on traite de problèmes complexes de programmation mathématique. Une alternative à la méthode du simplexe est l'algorithme de l'ellipsoïde, introduit et développé par les mathématiciens soviétiques Shor (en 1977), Khachian (en 1979), ainsi que par d'autres mathématiciens (Yudin, Nemirorskii). Sa principale caractéristique consiste à procèder non pas d'un polyhèdre convexe à un autre, mais de se concentrer sur la solution finale depuis l'extérieur vers un ellipsoïde qui contient au moins un point de la région réalisable.

L'un des principaux avantages de l'AE est de converger vers une solution en un temps polynômial (la méthode du simplexe y parvient en un temps exponentiel seulement). Par exemple, on imagine que le nombre de calculs (et donc le temps de calcul par ordinateur) dépend d'un paramètre L du problème. Un algorithme de temps polynômial exigerait peut-être L^2 étapes au plus. Pour $L = 100$, l'ordinateur aurait seulement besoin d'une fraction de seconde. Cependant, un algorithme de temps exponentiel comme la méthode du simplexe aurait besoin de 2^L étapes et nécessiterait théoriquement un millier d'années pour résoudre le même problème.

Nous présentons une brève description de la théorie fondamentale, l'algorithme lui-même et son interprétation graphique.

L'exploration des propriétés numériques et graphiques de l'AE sur une machine à calculer programmable ou sur un ordinateur et une comparaison avec la méthode du simplexe seraient pédagogiquement très utile. Une courte bibliographie concernant l'AE est ajoutée pour faciliter cette tâche.

Formellement, la programmation linéaire (PL) est le problème suivant :

1. soit une matrice $\boldsymbol{A}$ de nombre entier $m \times n$, un vecteur $\boldsymbol{b}$ à m composantes et un vecteur $\boldsymbol{c}$ à n composantes,

2. trouver un vecteur rationnel $\boldsymbol{x}$ à n composantes pour que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ soit minimalisé, ou bien

3. trouver qu'il n'y a pas de vecteur $\boldsymbol{x}$ à n composantes tel que $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, ou bien

4. trouver que l'ensemble $\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ n'a pas de limite inférieure.

Considérons maintenant le problème des inégalités linéaires (IL), qui sont définies comme suit :

soit une matrice $\boldsymbol{A}$ de nombre entier $m \times n$ et un vecteur $\boldsymbol{b}$ à m composantes. Existe-t-il un vecteur $\boldsymbol{x}$ à n composantes tel que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$?

Pour faciliter les choses, on suppose que dans les inégalités et programmations linéaires qui vont suivre, $m \geq n$, ceci n'étant pas une restriction réelle, mais uniquement pratique.

Il se trouve que IL est presque aussi difficile que PL, au moins en ce qui concerne l'existence des algorithmes de temps polynômial. Pour établir ceci, nous avons besoin de préliminaires.

Nous commençons par introduire une technique de programmation très commune qui s'appelle la recherche binaire. Supposons que nous voulions déterminer un entier inconnu x entre 1 et B en nous posant des questions du genre : "Est-ce que $x > a$?" pour le a de notre choix. Nous faisons ceci en nous demandant d'abord si x se trouve dans la moitié inférieure ou supérieure de l'intervalle $[1, B]$, puis dans la moitié inférieure ou supérieure du nouvel intervalle (plus petit d'un facteur de 2), et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'intervalle dans lequel on est certain de trouver x contienne seulement un entier : x. Ceci arrivera après $[\log_2 B]$ itérations. De telles questions peuvent être définies comme le nombre de fois où B doit être divisé par 2 pour obtenir un nombre égal à 1. Cela se produira après $\log_2 B$ questions.

L'exemple suivant illustre le procédé :

Questions pour x	Réponses	Intervalles des valeurs possibles
		$1 \dots 32$
x est-il > 16	non	1...16
x est-il > 8	oui	9...16
x est-il > 12	non	9...12
x est-il > 10	oui	$11 - 12$
x est-il > 11	non	$x = 11$

Nous résumons ce résultat en vue de son utilisation future comme suit :

un entier x entre 1 et B peut être déterminé par $[\log_2 B]$ questions de la forme : "Est-ce que $x > a$?".

10.2.1 L'algorithme de la méthode de Khachian pour IL

L'idée principale de l'algorithme est très simple : il procède par itérations. Durant tout le processus, nous conservons une ellipse qui contient une solution au système d'inéquations linéaires strictes, si une telle solution existe. Une itération consiste à remplacer l'ellipse courante par une autre plus petite, dans laquelle on est sûr de conserver la solution, si elle existe. Graphiquement, cela se traduit de la façon suivante. Nous traçons un hyperplan parallèle à celui de la contrainte violée choisie et qui passe par le centre. Nous marquons les points d'intersections avec l'ellipse. Nous fixons alors le centre de la nouvelle ellipse tel que celle-ci passe par ces intersections et par un point qui est le point de tangence entre l'ancienne ellipse et un autre hyperplan parallèle à celui de la contrainte violée considérée. Nous avons ainsi tracé la plus petite ellipse possible contenant encore une solution.

Après un nombre suffisant d'itérations, nous devons, soit découvrir une solution, soit admettre qu'il n'y en a pas, car l'ellipse est devenue trop petite pour en contenir encore une.

Considérons un ensemble réalisable X défini par un système d'inégalités linéaires $m \geq 2$ (contraintes) dans des variables réelles $n \geq 2$ et des coefficients entiers a_{ij} , b_j :

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., m$$

Notons que $\boldsymbol{x}' = (x_1, ..., x_n)$, $\boldsymbol{b}' = (b_1, ..., b_m)$ pour que, dans une notation de matrices $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$, où $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, est une matrice $m \times n$. Soit $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ qui dénote la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\boldsymbol{A}$ pour que la $i^{\text{ème}}$ inégalité puisse être écrite comme:

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq b_i \qquad i = 1, 2, ..., m$$

Certains mathématiciens insistent sur le fait que les inégalités ci-dessus doivent être prises au sens large, pour assurer que le volume de X soit non nul (ni un point, ni une ligne).

L'AE doit déterminer si le système d'inégalités $\boldsymbol{X}$ est consistant (c'est-à-dire s'il a une solution réalisable) ou non, rien de plus. Notons qu'aucune fonction objectif n'est présente et, donc, qu'aucune optimisation dirigée n'a lieu. Pour appliquer l'AE avec succès à un problème de programmation

linéaire, on doit le transformer en un problème de point réalisable. Nous retrouverons ce problème plus tard.

L'algorithme est le suivant :

1. une large hypersphère contenant une région réalisable X est construite. Une borne inférieure positive du volume de X est déterminée *a priori.*

2. une séquence d'ellipsoïdes avec des volumes progressivement plus petits est générée récursivement. Si le centre d'un ellipsoïde est réalisable (c'est-à-dire se trouve dans X), l'algorithme se termine.

3. plus on va de l'avant en termes d'itérations, plus le volume de l'ellipsoïde rapetisse par rapport à la borne inférieure du volume X. Il existe alors une borne supérieure pour le nombre d'itération ; un ellipsoïde dont le centre est contenu dans X doit être généré ou alors il n'existe pas de solution (notons que si X a un volume nul, par exemple un point, la propriété de terminaison bornée est perdue).

Le paramètre majeur du système $\boldsymbol{X}$ d'inégalités est défini comme suit :

$$L = \left[\sum_{i,j} \log_2(|a_{ij}| + 1) + \sum_{i} \log_2(|b_i| + 1) + \log_2 nm \right] + 1$$

où L caractérise l'input du système et indique le nombre de symboles 0 et 1 qui sont nécessaires pour écrire les inégalités dans le système de nombre binaire. Les bornes de calcul de l'AE sont polynômialement dépendantes de L.

Puisque la consistance et l'inconsistance (c'est-à dire la solubilité ou l'insolubilité) de $\boldsymbol{X}$ sont à déterminer, on doit établir une mesure d'inconsistance qui caractérise les étapes avant d'arriver à une solution. Le "résidu" du système au point $\boldsymbol{x}$ dans IR^n est défini comme :

$$\Theta(\boldsymbol{x}) = \max_i \{a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - b_i\} \qquad i = 1, 2, ...m$$

Notons que le résidu identifie simplement la contrainte qui est violée par la plus grande somme au point $\boldsymbol{x}$. Nous aimerions minimiser un écart également maximal restant dans le système. Il est évident que si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k$ est une solution, alors $\Theta(\boldsymbol{x}^k) \leq 0$. En réalité, si le résidu minimum tend vers zéro au moins, l'algorithme se termine ; le point correspondant $\boldsymbol{x}$ doit être une solution.

Si le résidu minimum reste toujours positif après $N = 16n^2L$ itérations, le système est inconsistant.

Khachian démontre que si le système $\boldsymbol{X}$ avec l'input L est consistant, alors on peut trouver une solution $\boldsymbol{x}^k$ dans l'hypersphère euclidienne S :

$$S = \{\boldsymbol{x} \,\big|\, (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2} \leq 2^L\}$$

Donc, S est l'ellipsoïde initial. De plus, si le système $\boldsymbol{X}$ avec l'input L est inconsistant, alors pour n'importe quel $\boldsymbol{x}$ dans IR^n, le résidu $\Theta(\boldsymbol{x}) \leq 2 \cdot 2^{-L}$. Pour décider si le système est consistant ou non, il suffit de trouver un point $\boldsymbol{x}$ dans IR^n pour que $\Theta(\boldsymbol{x}) \leq \Theta_S + 2^{-L}$. Le scalaire Θ_S est le résidu minimum de toute l'hypersphère initiale S. Soit $\Theta(\boldsymbol{x}) \leq 2^{-L}$ (c'est-à-dire que Θ_S est nul ou négatif) et le système est consistant, ou bien $\Theta(\boldsymbol{x}) \geq 2 \cdot 2^{-L}$ et le système est inconsistant.

L'algorithme, qui consistue également la preuve des données ci-dessus, est construit pour trouver le point nécessaire $\boldsymbol{x}$.

Définissons récursivement une séquence de points $\boldsymbol{x}^k$ (centre de l'ellipsoïde) et de matrices $\boldsymbol{A}_k$, $k = 0, 1, ..., N$ comme suit :

1. posons $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{A}_0 = 2^L\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{A}_0$ est une matrice diagonale $n \times n$ avec des éléments 2^L, et $\boldsymbol{I}$ est une matrice unitaire). Ceci définit l'ellipsoïde de départ $E_0 \sim (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{A}_0)$. Observons que E_0 coïncide avec l'hypersphère initiale S de centre $\boldsymbol{x}^0$. Calculons $\Theta_0 = \max_i\{-b_i\}$, la grandeur du résidu au centre de l'hypersphère.

2. supposons que l'ellipsoïde $E_k \sim (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{A}_k)$ soit défini. Évaluons le résidu $\Theta(\boldsymbol{x}^k)$ au centre de E_k. Le résidu minimum obtenu jusqu'ici est à retenir en posant $\Theta_{k+1} = \min\{\Theta_k , \Theta(\boldsymbol{x}^k)\}$. C'est-à-dire que Θ_{k+1} est la valeur minimale du résidu dans les approximations déjà obtenues $\boldsymbol{x}^0, ..., \boldsymbol{x}^k$. (Il faut noter que le centre de l'ellipsoïde précédent peut être arbitrairement proche d'un point réalisable, alors que le prochain centre peut en être plus éloigné.)

3. si $\boldsymbol{x}^k$ satisfait les inégalités, s'arrêter. Sinon, choisir l'inégalité la plus violée selon $\Theta(\boldsymbol{x}^k)$, par exemple le $i^{\text{ème}}$:

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^k > b_i$$

et construire un nouvel ellipsoïde $E_{k+1} \sim (\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{A}_{k+1})$. Le nouvel ellipsoïde contient entièrement le demi-ellipsoïde $1/2E_k$ dans lequel le

résidu $\Theta(\boldsymbol{x})$ est certainement plus petit que $\Theta(\boldsymbol{x}^k)$. C'est-à-dire que nous définissons un hyperplan $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} = d$, $d < \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^k$, qui est tangent à E_k, et un hyperplan parallèle $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^k$ qui coupe E_k. Alors E_{k+1} est obtenu en calculant :

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{a}_i'}{(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{a}_i')^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{A}^{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\boldsymbol{A}^k - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{a}_i')(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{A}_k)}{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{a}_i'}$$

4. répéter l'étape n°3 tant que $k < 16n^2L$; si $k = 16n^2L$, alors s'arrêter. Le plus petit résidu minimal Θ_{n+1} est l'output.

Khachian a également montré que $\Theta_{N+1} \leq \Theta_S + 2^{-L}$. Il s'ensuit que :

$$\Theta_{N+1} \leq 2^{-L} \qquad \text{(le système est consistant)}$$

ou bien

$$\Theta_{N+1} \geq 2 \cdot 2^{-L} \qquad \text{(le système est inconsistant).}$$

Considérons un programme linéaire :

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z & = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Sa grandeur est :

$$L = mn + \log_2 |P|$$

où P est le produit des coefficients non-nuls arrondis apparaissant dans la matrice $\boldsymbol{A}$, les vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

L'algorithme pour les systèmes d'inéquations linéaires strictes est :

- input : un système $(m \times n)$ d'inéquations linéaires strictes $A\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, de grandeur L.

- output : un vecteur $\boldsymbol{x}_n$ tel que $A\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, si un tel vecteur existe, une réponse négative en d'autres cas.

1. **(initialisation)** $j = 0$, $\boldsymbol{t}_0 = 0$, $B_0 = n^2 2^{2L} I$

j représente le nombre d'itérations. L'ellipse courante est :
$E_j = \{\boldsymbol{x} | (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}_j)'\boldsymbol{B}_j(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}_j) < 1\}$

2. **(test)** si $\boldsymbol{t}_j$ est solution de $\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{b}$, donner $\boldsymbol{t}_j$; si $j > k = 16(n+1)nL$, arrêter la procédure.

3. **(itération)** choix d'une inéquation de $\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{b}$ violée par $\boldsymbol{t}_j$, par exemple $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{t}_j > \boldsymbol{b}$.

Calculer :

$$\boldsymbol{t}_{j+1} = \boldsymbol{t}_j - \tfrac{1}{n+1} \frac{\boldsymbol{B}_j \boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{B}_{j+1} = \tfrac{n^2}{n^2-1} \left(\boldsymbol{B}_j - \tfrac{2}{n+1} \frac{(\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{a})\prime(\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\prime\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{a}} \right)$$

Exemple 10.1 *Supposons que pour un j quelconque, nous ayons* $\boldsymbol{t}_j$*=(0,0), et :*

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Supposons également que l'une des inéquations soit $x + y < -1$. Cette situation est dépeinte dans la figure 11.1. Rappelons que nous savons intuitivement que la solution au système, si elle existe, est contenue dans l'ellipse E_j.

Puisque toute solution doit satisfaire $x + y < -1$, nous pouvons affirmer que toutes les solutions se trouvent dans la partie inférieure gauche de l'ellipse. Si nous pouvions dessiner une ellipse E_{j+1} qui inclurait cette partie inférieure gauche, ce serait un pas en avant.

C'est exactement ce que fait l'itération (voir figures 11.1 et 11.2). Nous obtenons $\boldsymbol{t}_{j+1} = (-3/(13)^{0.5} - 4/3(13)^{0.5})$ et :

$$B_j = \begin{bmatrix} 84/13 & -32/13 \\ -32/13 & 496/117 \end{bmatrix}$$

Nous venons de considérer une version simple de l'algorithme de l'AE pour IL. Cette version est de Papadimitriou et Steiglitz (1982).

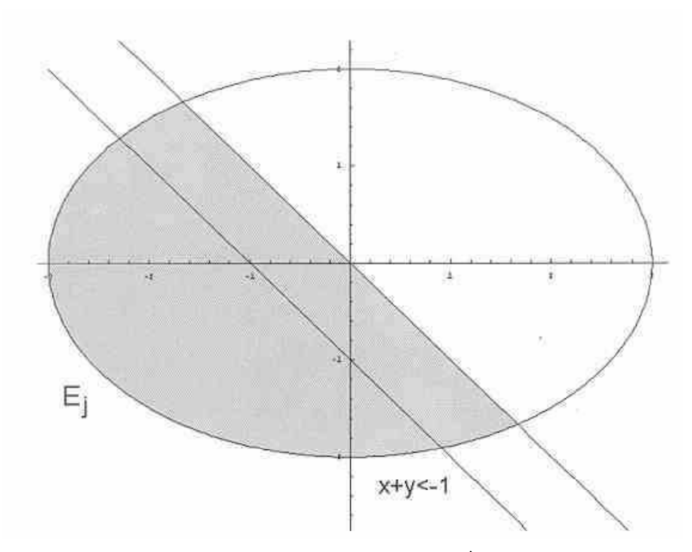


Figure 11.1 : Ellipsoïde à la $j^{ème}$ itération

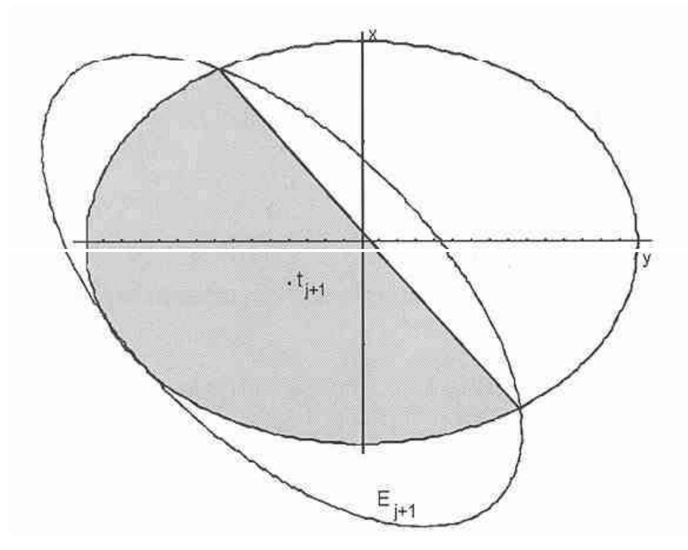


Figure 11.2 : Ellipsoïde à l'itération suivante.

10.2.2 Interprétation graphique

Il est préférable de présenter quelques exemples graphiques du procédé. La figure 10.3 montre un petit polyhèdre X convexe. Nous espérons trouver au moins un point réalisable. Nous commençons par enfermer le polyhèdre dans une grande hypersphère centrée en $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$. Évaluons le résidu au centre et

identifions la contrainte la plus violée. Dessinons un hyperplan parallèle qui passe par le centre et marquons les points d'intersection avec l'hypersphère A et B. Éliminons la demi-sphère qui contient seulement les résidus les plus grands. Un autre hyperplan parallèle est tangent à l'autre demi-sphère qui marque le point C. Fixons le centre du nouvel ellipsoïde pour qu'il passe par les points A, B et C. Son volume correspond au minimum possible. Construire le nouvel ellipsoïde.

Dans la figure 11.4, le procédé continue. Une fois le centre du nouvel ellipsoïde trouvé dans le polyhèdre, on arrête. Le centre représente la solution.

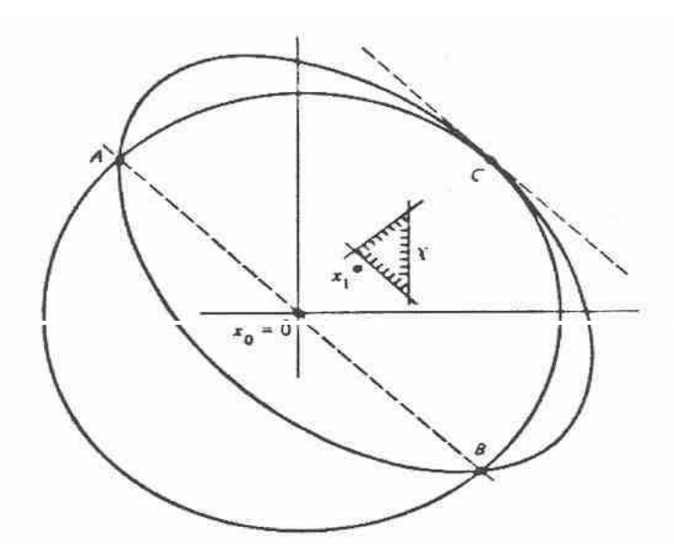


Figure 11.3 : L'algorithme commence avec une large hypersphère initiale centrée en $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$. Le rapport de volume des ellipsoïdes successifs est initialement grand (l'hypersphère initiale n'est pas dessinée à l'échelle).

Murray (1979) propose une modification utile de l'AE. La contrainte la plus violée est identifiée et l'hyperplan $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ coupe l'ellipsoïde aux points A et B. Un hyperplan tangentiel et parallèle marque le point C. Seule la subdivision extraite de l'ellipsoïde est maintenant entourée par l'ellipsoïde du plus petit volume, et qui passe par A, B et C. Ceci est montré dans la figure 10.5.

L'avantage de la modification de Murray est que le rapport du volume du nouvel ellipsoïde comparé à l'autre ellipsoïde a été largement amélioré. En plus, le centre $\boldsymbol{x}^{k+1}$ est toujours réalisable à l'égard de la contrainte violée choisie au $k^{ième}$ pas. Évidemment, beaucoup d'autres modifications sont

possibles. La flexibilité et les différentes possibilités offertes par les méthodes ellipsoïdales génèrent l'intérêt grandissant des chercheurs dans ce domaine.

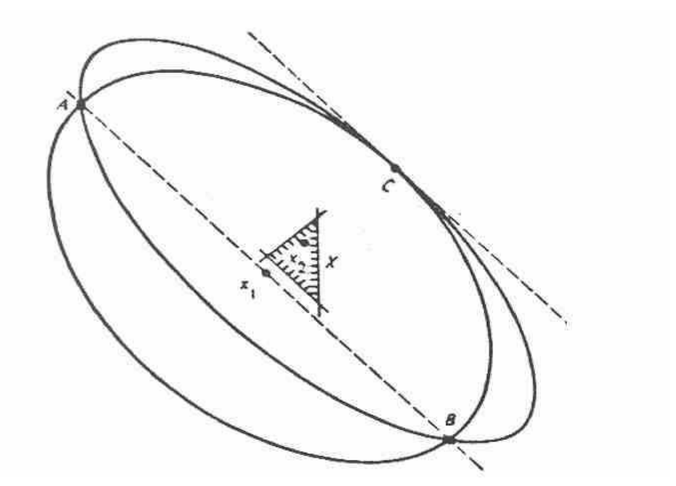


Figure 11.4 : Suite de la figure 11.3. On observe que $\boldsymbol{x}^2$, le centre du troisième ellipsoïde, se trouve dans X ; $\boldsymbol{x}^2$ représente la solution et l'algorithme s'arrête.

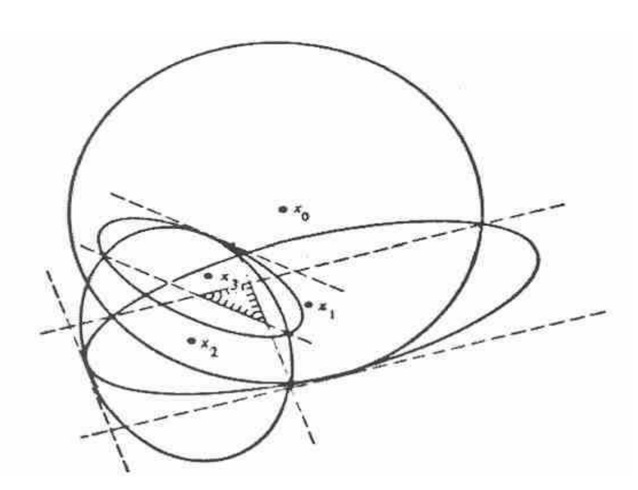


Figure 11.5 : La modification de Murray. On observe la rapidité relative de X. Les rapports des volumes des ellipsoïdes successifs sont beaucoup plus petits. La solution est obtenue à l'étape suivante en calculant $\boldsymbol{x}^4$.

10.2.3 L'algorithme de Shor-Khachian en programmation linéaire

Nous avons dit que l'AE ne peut pas être appliqué à la programmation linéaire sans transformer le problème en un problème de point réalisable. La méthode suivante est basée sur les résultats bien connus de la théorie de la dualité. Voir à ce propos Gàcs et Loràsz (1979).

Considérons le problème de programation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser } \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} & \\ \text{s.c.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0} \\ \text{où } \boldsymbol{c}' = (c_1, ..., c_n) & \end{array}$$

Ce problème est identique au système d'inégalités suivant :

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} & \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

où $\boldsymbol{y}' = (y_1, ..., y_n)$. Rappelons que pour n'importe quelle solution (x, y) de ce système, x constitue une solution optimale pour le problème de maximisation original.

Malheureusement, l'AE ne peut pas être simplement appliqué au problème transformé. Comme Murray (1979) l'a remarqué, n'importe quelle transformation d'un programme linéaire en un problème de point réalisable unique élimine inévitablement une région réalisable de volume zéro. La méthode du simplexe est davantage adaptée à ce genre de formulation. On peut également formuler un problème de point réalisable dans lequel la région réalisable est une hypersphère de petit volume choisie au hasard et qui contient le point solution. Mais même un volume aussi petit nécessite un nombre d'itérations assez élevé.

Il faut donc procéder à d'autres recherches. L'AE ne dépend pas du nombre de contraintes mais du nombre de variables. Même les problèmes comprenant un nombre élevé de contraintes pourraient être résolus de manière assez efficace. De plus, les inégalités linéaires pourraient également être traitées par la méthode ellipsoïdale.

Il existe une importante catégorie de problèmes de programmation linéaire pour laquelle une solution est caractérisée par un ensemble réalisable de volume nul. Rappelons qu'en programmation "goal", on prédétermine les valeurs considérées comme satisfaisantes à l'égard de toutes les fonctions objectif. En effet, on transforme toute fonction objectif en contraintes additionnelles et on définit une région de solutions réalisables qui soit satisfaisante. Si on trouve une solution réalisable, on peut réduire à nouveau la région en réajustant les "goals" à des niveaux plus apropriés. L'algorithme est alors à nouveau appliqué. Si le système est inconsistant, c'est-à-dire si la région satisfaisante est vide, on peut abaisser les "goals" jusqu'à ce qu'une région réalisable de volume non nul soit trouvée. Une version interactive de l'AE pourrait être utilisée pour guider ce processus de recherche.

Exemple 10.2 *Considérons le programme linéaire suivant afin de montrer le fonctionnement de notre algorithme. Soit le système suivant :*

$$\begin{array}{lll} \text{Max } z = & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.c.} & x_1 + 5x_2 & \leq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 & \leq 15 \\ & x_1,\, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

L'algorithme de Khachian minimise toujours la fonction objectif. Les contraintes doivent donc être du type $\leq$ pour l'algorithme lui-même.

$$\begin{array}{lll} \text{Min } z = & -x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.c.} & x_1 + 5x_2 & \leq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 & \leq 15 \\ & x_1,\, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Si les contraintes de positivité sont nécessaires, elles seront satisfaites avant les contraintes usuelles. C'est pourquoi nous en arrivons à :

$$\begin{array}{lll} \text{Min } z = & -x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.c.} & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & x_1 + 5x_2 & \leq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 & \leq 15 \end{array}$$

Afin de pouvoir utiliser un ordinateur pour les calculs, on va normaliser le problème de la façon suivante.

On considère L comme une constante (=10). De ce fait, il faut adapter chaque programme linéaire. Le programme calcule un coefficient de manière à normaliser chaque programme linéaire et d'obtenir la valeur 10 pour la constante L.

Dans notre exemple, le nombre des variables est 2 et le nombre des contraintes est 4. Pour trouver le facteur de normalisation, nous avons donc :

$$\exp\left(\frac{10Ln2}{2\cdot 4}\right) = 2,378$$

Multiplication des éléments non nuls (10 éléments)=15,000.
Facteur de normalisation $= \left(\dfrac{15,000}{2,378}\right)^{1/10} = 2,398$
Limite de l'itération $= 16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 192$
On divise tous les éléments du système (10.4) par 2,398. On a alors :

$$\begin{array}{rrrl} & \text{minimiser} & z' = & -0,417x_1 - 0,834x_2 \\ \text{s.c.} & -0,417x_1 & & \leq 0 \\ & & -0,417x_2 & \leq 0 \\ & 0,417x_1 & +2,085x_2 & \leq 4,170 \\ & 2,085x_1 & +0,834x_2 & \leq 6,255 \end{array}$$

- Initialisation

$$\boldsymbol{B}_0 = n^2 \cdot 2^{2L} \cdot I = 2^2 \cdot 2^{20} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4194304 & 0 \\ 0 & 4194304 \end{bmatrix}$$

- Itération 1

$j = 1$,
contrainte 1 violée car $0<0$.
gradient de la contrainte 1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a\prime} &= \begin{pmatrix} -0,417 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{t}_1 &= \boldsymbol{t}_0 - \frac{1}{n+1}\frac{\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a}}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\frac{\begin{bmatrix} 4194304 & 0 \\ 0 & 4194304 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.417 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} -0,417 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4194304 & 0 \\ 0 & 4194304 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,417 \\ 0 \end{bmatrix}}} \\
&= \begin{bmatrix} 682,66 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et la nouvelle matrice

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1 &= \frac{n^2}{n^2-1}\left[\boldsymbol{B}_0 - \frac{2}{n+1}\frac{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a})(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a})'}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a}}\right] \\
&= \frac{4}{3}\left(\begin{bmatrix} 4194304 & 0 \\ 0 & 4194304 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\frac{\begin{bmatrix} -1749024,769 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1749024,769 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -0,417 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4194304 & 0 \\ 0 & 4194304 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,417 \\ 0 \end{bmatrix}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1864135 & 0 \\ 0 & 1864135 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Itération 2

  $j = 2$

  contrainte 2 violée car $0 < 0$.

  gradient de la contrainte 2

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a\prime} &= \begin{pmatrix} 0 & -0,417 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{t}_2 &= \begin{bmatrix} 682,66 \\ 788,27 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 2485513,33 & 0 \\ 0 & 2485513,33 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Itération 3

  $j = 3$

  contrainte 3 violée car $1927,71 < 4,17$

  gradient de la contrainte 3

$$\boldsymbol{t}_3 = \begin{bmatrix} 0,417 \\ 2,085 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 3229042,96 & -424874,08 \\ -424874,08 & 1189647,34 \end{bmatrix}$$

On continue jusqu'aux deux dernières itérations.

- Itération 163

  $j = 163$

  contrainte 4 violée

  gradient de la contrainte 163

$$\boldsymbol{t}_{163} = \begin{bmatrix} 2,085 \\ 0,834 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{163} = \begin{bmatrix} 4,98E-8 & 4,72E-9 \\ -3,07E-8 & 7,84E-9 \end{bmatrix}$$

- Itération 164

$j = 164$
contrainte 3 violée
gradient de la contrainte 164

$$\boldsymbol{t}_{164} = \begin{bmatrix} 0,417 \\ 2,085 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{164} = \begin{bmatrix} 2,49E-8 & 1,53E-9 \\ -4,58E-8 & 9,91E-9 \end{bmatrix}$$

Puisque les coefficients de la matrice B_{164} sont au maximum, la fonction objectif est choisie. Donc on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,39 \\ x_2 &= 1,52 \end{aligned}$$

et la valeur pour la fonction objectif est $z = -5,43$.

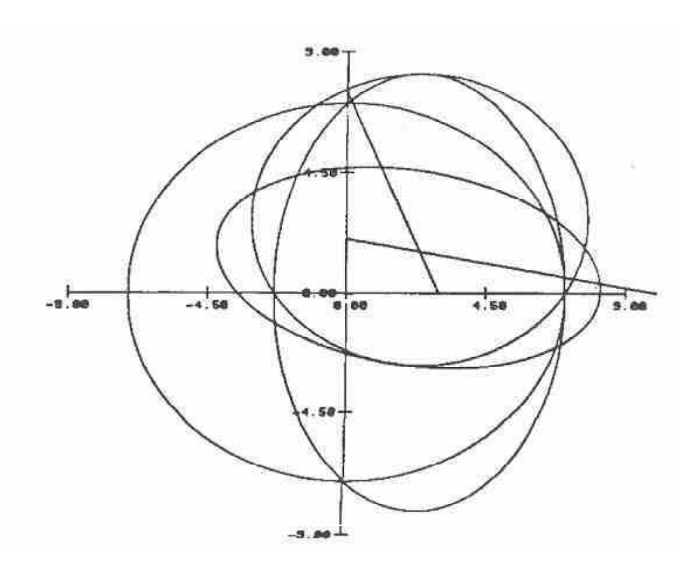


Figure 11.6 : Début des itérations

Les figures 11.6, 11.7 et 11.8 montrent le début, le milieu et la fin des itérations pour l'exemple donné.

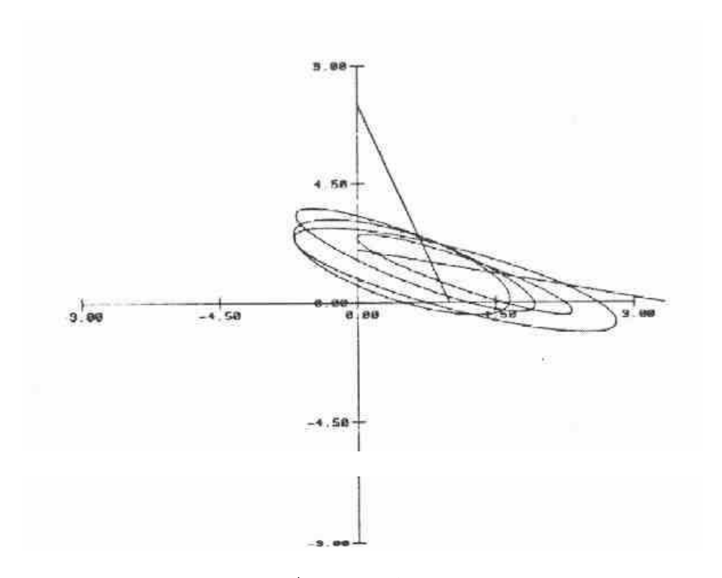


Figure 11.7 : Après plusieurs itérations

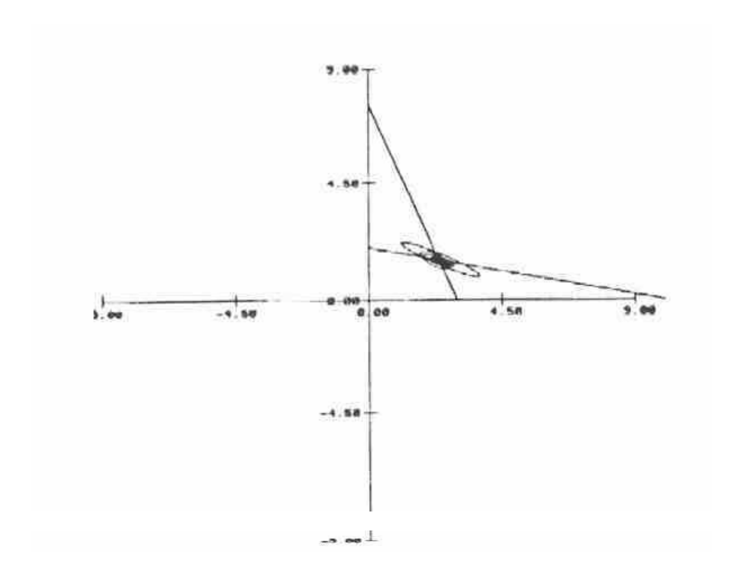


Figure 11.8 : Fin des itérations

10.3 Algorithme de Karmarkar

Quelques années après les travaux de Khachian sur l'algorithme des ellipsoïdes (1979), Karmarkar s'intéresse aux méthodes de points intérieurs (1984). Il démontre alors que grâce à son algorithme il peut résoudre des problèmes de programmation linéaire et non-linéaire en un temps polynômial. C'est alors que ces méthodes deviennent compétitives face à l'algorithme du simplexe de Dantzig (qui n'est pas polynômial comme l'ont démontré Klee et Minty en 1972).

L'algorithme de Karmarkar suivant s'applique aux problèmes linéaires. La définition d'une fonction positivement homogène (le potentiel de Karmarkar) et la minimisation de ce potentiel nous permettent alors de résoudre le programme linéaire original.

La version simplifiée résumée ci-dessous donne une idée de cet algorithme.

On peut transformer tout programme linéaire (à l'aide d'un changement de variables) sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & z = \boldsymbol{cx} \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \\ & x_1 + x_2 + ... + x_n = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

Le potentiel de Karmarkar est alors défini de la façon suivante :

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{\boldsymbol{cx}'}{x_j}\right)$$

De plus, on suppose que le point $(1/n, ..., 1/n)'$ satisfait les contraintes. L'algorithme se présente comme suit :

1. on part du point $\boldsymbol{x}^0 = (1/n, ..., 1/n)'$ et on pose $k = 0$;
2. si $\boldsymbol{cx}^k$ est arbitrairement petit (c'est-à-dire que $\boldsymbol{cx}^k < \varepsilon$ pour ε fixé), alors on stoppe la procédure sinon on passe à l'étape suivante ;
3. il s'agit de trouver le nouveau point $\boldsymbol{y}^{k+1} = \left(y_1^{k+1}, ..., y_n^{k+1}\right)$ donné par :

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = (1/n, ..., 1/n)' - \frac{\Theta \boldsymbol{c}_p}{\|\boldsymbol{c}_p\| \sqrt{n(n-1)}}$$

   où $\boldsymbol{c}_p = (I - P'(PP')^{-1} P)\left[Diag(\boldsymbol{x}^k)\right]\boldsymbol{c}'$, où $\|.\|$ indique la norme d'un vecteur et où P est la $(m+1) \times n$ matrice dont les m premières lignes sont $A\left[Diag(\boldsymbol{x}^k)\right]$ et dont les dernières lignes sont des vecteurs composés uniquement de 1.

   et où $0 < \theta < 1$ est choisi de façon à assurer la convergence. ($\theta = 1/4$ fait converger notre expression.)

4. on définit alors le nouveau point $\boldsymbol{x}^{k+1}$ comme suit :

$$x_j^{k+1} = \frac{x_j^k y_j^{k+1}}{\sum_{r=1}^{n} x_r^k y_r^{k+1}} \qquad j = 1, ..., n$$

5. on augmente k de 1 et on reprend à partir de l'étape 2.

Le potentiel de Karmarkar intervient ici à l'étape 2. En effet Karmarkar montre que si le potentiel évalué en $\boldsymbol{x}^k$ est assez petit, alors $z = \boldsymbol{cx}^k$ sera arbitrairement proche de 0. D'où l'intérêt de minimiser ce potentiel.

Exemple 10.3 *Résolvons le problème suivant :*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & z = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.c.} & x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

On trouve facilement la solution optimale : $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ qui donne $z = 0$.

Pour notre algorithme on a :

$m = 3$, $n = 1$, $\theta = 0,25$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

On pose alors $\boldsymbol{x}^{0\prime} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ qui nous fournit $z = \frac{1}{3}$.

On obtient $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}_p = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$

et donc $\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ qui donne $z = \frac{1}{4}$.

Remarque : On a toujours $\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{x}^1$ mais pas $\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{x}^k$ pour $(k \neq 1)$ en général.

À la deuxième itération on trouve :

$\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{y}^1$ et $\boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} 0,1818 & 0,4091 & 0,4091 \end{pmatrix}$ qui donne $z = 0,1818$

À la quatrième itération on trouve :

$\boldsymbol{y}^4 = \boldsymbol{y}^1$ et $\boldsymbol{x}^4 = \begin{pmatrix} 0,0899 & 0,4551 & 0,4551 \end{pmatrix}$ qui donne $z = 0,0899$

À la dixième itération on trouve :

$\boldsymbol{y}^{10} = \boldsymbol{y}^1$ et $\boldsymbol{x}^{10} = \begin{pmatrix} 0,0086 & 0,4957 & 0,4957 \end{pmatrix}$ qui donne $z = 0,0086$.

z est assez petit, on peut stopper la procédure. On obtient ainsi une bonne approximation de notre solution

10.4 Conclusion

Évaluer la résolution de PL en utilisant les algorithmes de points intérieurs, implique deux critères majeurs : les exigences de mémoire et la durée du procédé de l'algorithme. Sous sa forme présente, l'algorithme semble moins performant que la méthode du simplexe dans les deux domaines. Par exemple, considérons un PL de taille moyenne comportant 2 000 variables et 300 contraintes. Un problème de cette taille n'est pas complexe si on le résoud avec la méthode du simplexe. En revanche, l'algorithme de Khachian

nécessiterait une matrice Q de dimension 2 300 par 2 300 ainsi qu'environ 84,64 (L) million d'itérations, où L est donné par l'équation (10.1) et est évidemment un très grand nombre.

L'élément le plus important lorsqu'il s'agit d'appliquer l'algorithme en pratique est d'améliorer le procédé permettant de choisir des valeurs pour $\boldsymbol{x}_0$ et r. Réduire le volume de la sphère initiale limite en général le nombre d'itérations nécessaires, particulièrement lorsque l'ensemble solution est un seul point comme dans le cas de la plupart de PL.

Depuis la publication du rapport de Karmarkar en 1984, la recherche dans le domaine de la programmation mathématique a connu un nouvel élan. Entre 1984 et 1989 plus de 1 300 publications sur le sujet ont vu le jour. Les méthodes de points intérieurs ont tendance à nécessiter moins d'itérations que les algorithmes du simplexe bien que chaque itération soit plus longue.

Chapitre 11

Solutions des exercices

11.1 Chapitre 2

Exercise 1 *Exercice 1*

a. Le produit $\boldsymbol{AB}$ est bien défini.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le produit $\boldsymbol{BA}$ n'est pas défini car $\boldsymbol{B}$ n'a pas le même nombre de colonnes que $\boldsymbol{A}$ de lignes.

b. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 28 \\ 42 & 49 & 56 \\ 73 & 50 & 84 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 19 & 22 & 29 \\ 5 & 10 & 8 \\ 46 & 60 & 131 \end{pmatrix}$

c. $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ ne sont pas définis.

Exercice 2

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{8}{15} & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\boldsymbol{B}) = 1, r(\boldsymbol{C}) = 3$$

Exercice 4

a. $\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 + \gamma \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ correspond au système d'équation linéaires suivant:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

dont la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont donc linéairement indépendants.

b. Avec $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 2$, $\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 + \gamma \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont donc linéairement dépendants.

Exercice 5

- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}) = 2$. Le système est donc compatible.
- Il a une infinité de solutions car $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}) \leq m$ (nombre d'équations, ici $m = 2$) et $r(\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}) \leq n$ (nombre de variables, ici $n = 3$).
- En prenant comme base :

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

on a $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x_3 = 0$

Avec

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

on a $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$ et $x_2 = 0$

Avec

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

on a $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \\ \frac{14}{13} \end{pmatrix}$ et $x_1 = 0$

On note que ces trois solutions de base sont non-dégénérées, car aucune variable de base n'est nulle.

Exercice 6

$$\overline{X_1X_2} = \left\{ \boldsymbol{x} | \, \boldsymbol{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 0 \quad \boldsymbol{x} = (6,1)'$$

$$\lambda = \tfrac{1}{4} \quad \boldsymbol{x} = (5, \tfrac{7}{4})'$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \quad \boldsymbol{x} = (4, \tfrac{5}{2})'$$

$$\lambda = \tfrac{3}{4} \quad \boldsymbol{x} = (3, \tfrac{13}{4})'$$

$$\lambda = 1 \quad \boldsymbol{x} = (2,4)'$$

Exercice 7

a. Convexe

b. Convexe

c. Non convexe

Exercice 8

- On a:

$$M = (3,1) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(6,0) + \lambda_3(3,3)$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Ce qui revient à résoudre le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} 1 = &\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3 = &\quad 6\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 1 = &\quad 3\lambda_3 \end{aligned}$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$

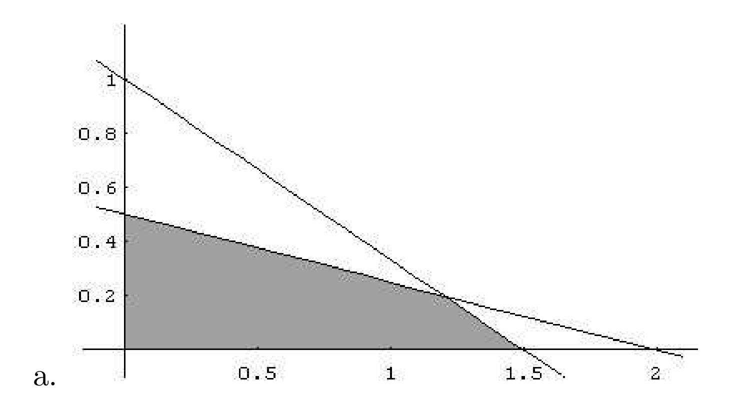
- $M = \frac{1}{3}(6,0) + \frac{1}{3}(3,3)$

Exercice 9

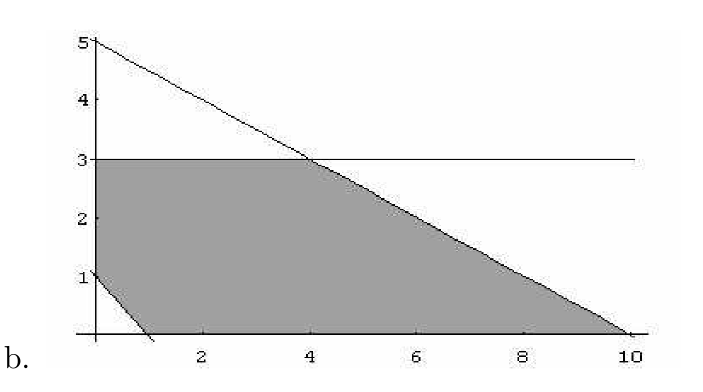
- $M = \left(\frac{26}{8}, \frac{21}{8}\right)$

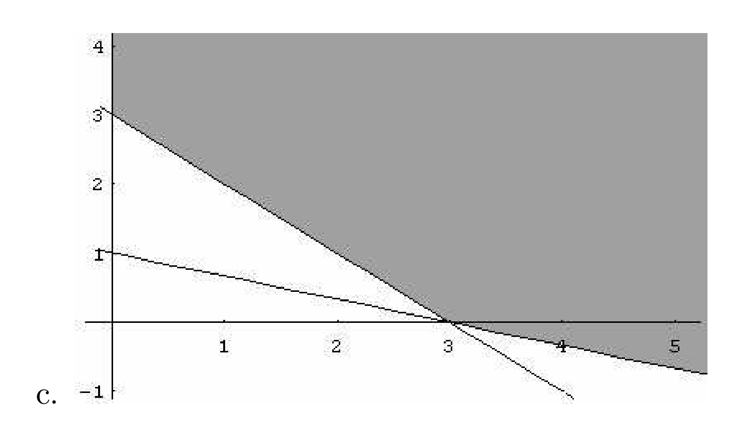
Exercice 10

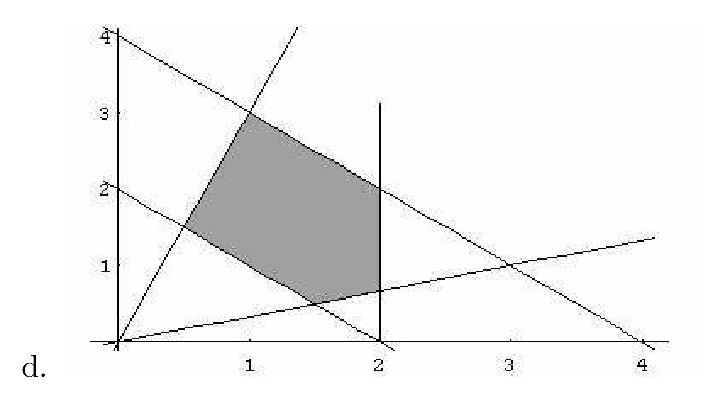
a.



b.



c. 

d. 

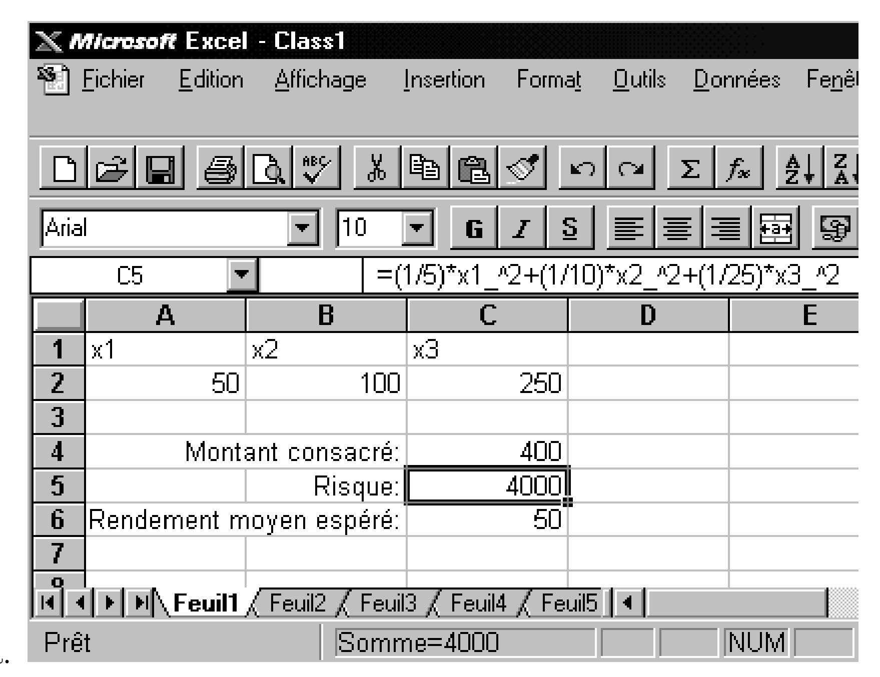
11.2 Chapitre 3

Exercice 1

$$y = 10$$
$$x = 20$$

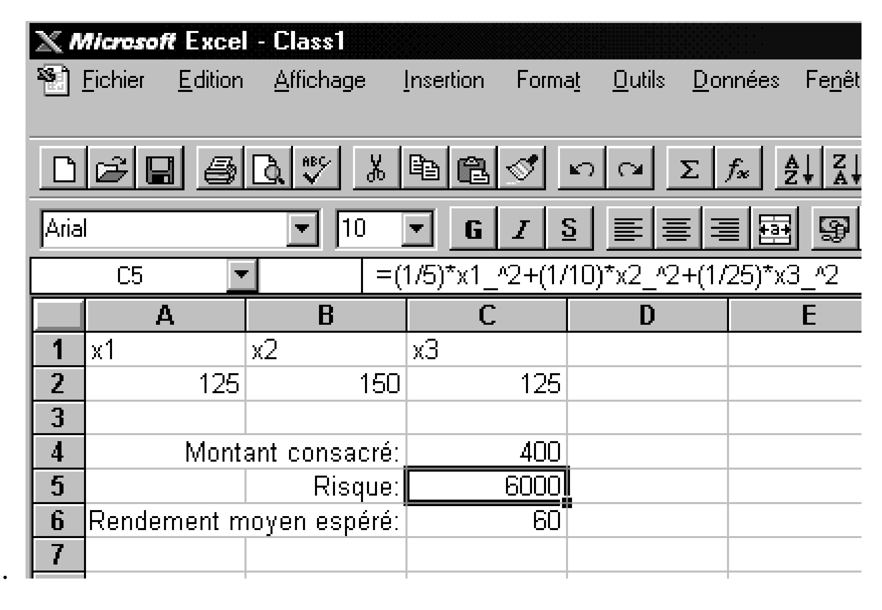
Exercice 2

La solution proposée utilise ici le **Solveur** du logiciel Excel.



a.

Soit $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ et $x_3 = 250$. Avec $V = 4\ 000$ et $\overline{R} = 50$.



b.

Soit $x_1 = 125$, $x_2 = 150$ et $x_3 = 125$. Avec $V = 6\ 000$, le risque est donc plus élevé que lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le rendement.

Exercice 3

a. $K = L = 4$, $Q = 16$ et le profit correspondant est de 64.-

b.i. Formulation du problème :

Il faut maximiser : $Q(K,L) = 8K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}}$
sous la contrainte : $8Q - 12K - 4L = 48$
c'est-à-dire : $64K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 12K - 4L - 48 = 0$

b.ii. Calcul de la combinaison optimale des facteurs :

$$F(K,L,\lambda) = 8K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}} - \lambda\left(64K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 12K - 4L - 48\right)$$

$$\begin{array}{rclcl} \frac{\partial F}{\partial K} & = & 3K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 24\lambda K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}} + 12\lambda & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} & = & K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}} - 8\lambda K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}} + 4\lambda & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} & = & -\left(64K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 12K - 4L - 48\right) & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{3K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}}}{24K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 12} = \frac{K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}}}{8K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}} - 4}$$

$$\Longrightarrow 24K^{-\frac{1}{4}}L^{-\frac{3}{4}} - 12K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}} = 24K^{-\frac{1}{4}}L^{-\frac{3}{4}} - 12K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}}$$

$$\Longrightarrow K^{-\frac{5}{8}}L^{\frac{1}{8}} = K^{\frac{3}{8}}L^{-\frac{7}{8}}$$

$$\Longrightarrow \frac{L}{K^5} = \frac{K^3}{L^7}$$

$$\Longrightarrow L^8 = K^8$$

$$\Longrightarrow L = K$$

b.iii. $K = L = 9$ et $Q = 24$

Exercice 4

$K = 10, L = 40, P_K = 3$

Exercice 5

$x = y = 0,5$

Exercice 6

a. recette totale $= -8q^2 + 120q - 2I^2 + 4Iq - 400$

b. $q = 10, I = 10$ pour un profit maximal de $\pi = 200$.

c.

$$\Delta^* = \frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2}(10,10) \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial I^2}(10,10) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial I \partial q}(10,10)\right)^2 = 48 > 0$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} < 0$$

$$\Longrightarrow \text{ Il s'agit bien d'un maximum.}$$

Exercice 7

a. $x = 5, y = 10, z = 5$

b. $x = 5, y = 12, z = 4$

Exercice 8

$x = 5, y = 5, z = 0$

Exercice 9

$K = L = 16$, le coût total et de 96.

Exercice 10

Maximum en $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$
Minimum en $x = y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

Exercice 11

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 10x - 12y + 151 \text{ à minimiser}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 10 = 0 \longrightarrow x = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 12 = 0 \longrightarrow y = 6$$

$$x = 5, y = 6, CT = 90$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 > 0$$

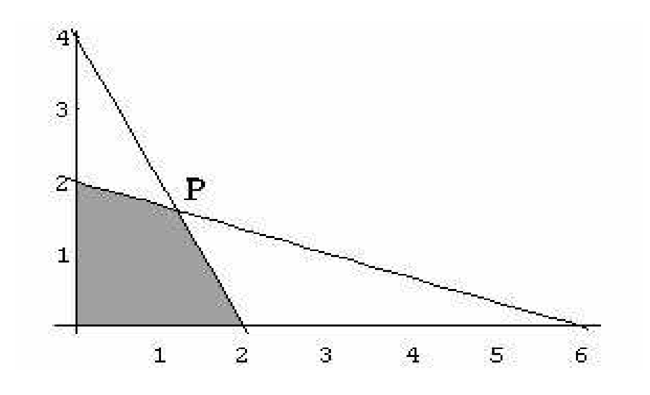
$$\Longrightarrow \text{min en } (5; 6)$$

Exercice 12

$$x = 6,\ y = 9 \text{ et } U = 612$$

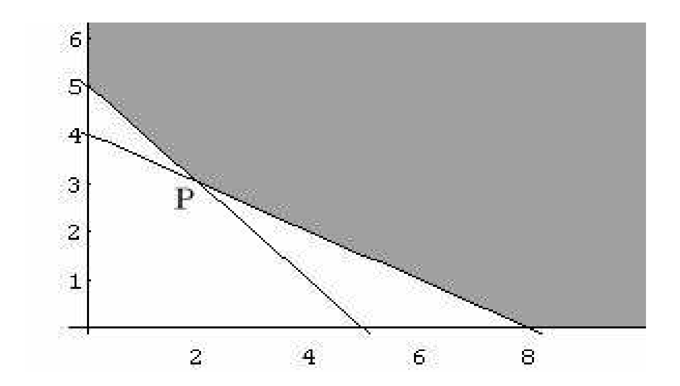
11.3 Chapitre 4

Exercice 1



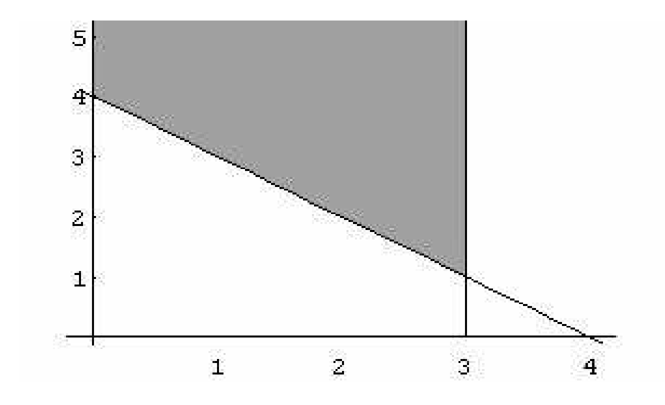
Maximum au point $P\,(1,2; 1,6)$ pour $z = 7,2$

Exercice 2



Minimum au point $P(2,3)$ avec $z = 8$

Exercice 3



Solution infinie avec une valeur infinie de z.

Exercice 4

Contraintes	Point	Contrôle	z
1,2,3	(0,120,40)	oui	560
1,2,4	(75,0,100)	oui	650
1,2,5	(-50,200,0)	non	-
1,3,4	(0,0,400)	non	-
1,3,5	(0,133.3,0)	oui	400
1,4,5	(100,0,0)	oui	200
2,3,4	(0,0,100)	oui	500
2,3,5	(0,200,0)	non	-
2,4,5	pas de sol.	-	-
3,4,5	(0,0,0)	oui	0

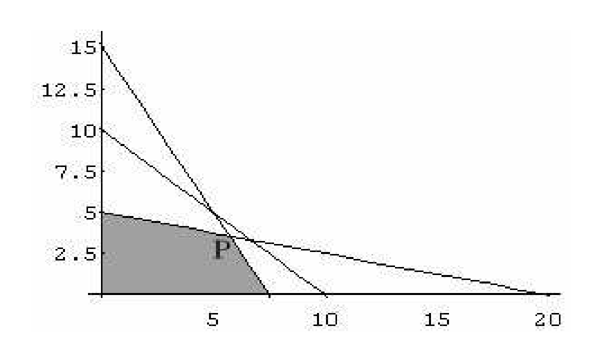
Le maximum est donc atteint en $x_1 = 75, x_2 = 0, x_3 = 100$ et $z = 650$

Exercice 5

Contraintes	Point	Contrôle	z
1,2,3	(0,1260,240)	oui	426
1,2,4	(700,0,800)	oui	440
1,2,5	(-300,1800,0)	non	-
1,3,4	(0,0,3600)	non	-
1,3,5	(0,1350,0)	oui	405
1,4,5	(900,0,0)	oui	360
2,3,4	(0,0,800)	oui	160
2,3,5	(0,1800,0)	non	-
2,4,5	pas de sol.	-	-
3,4,5	(0,0,0)	oui	0

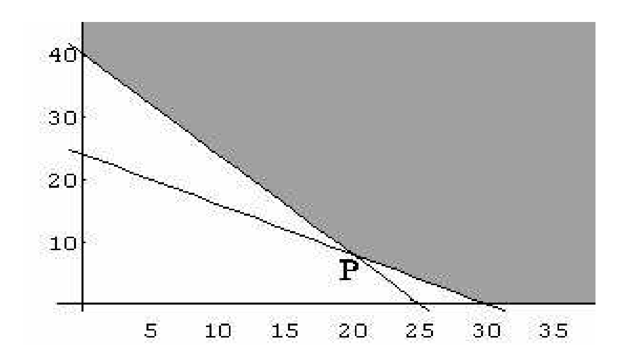
Le maximum est donc atteint en $x_1 = 700, x_2 = 0, x_3 = 800$ et $z = 440$

Exercice 6



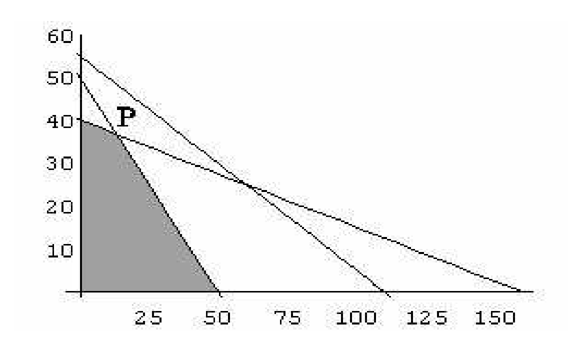
Le tailleur maximise son profit en $P(\frac{40}{7}, \frac{110}{7})$ et réalise un profit $z = 1271,40$.

Exercice 7



Le prix du mélange est minimisé en $P(20, 8)$ et revient à 25,60*CHF*

Exercice 8



Le profit maximum de 2466,65 CHF est atteint en $P(\frac{40}{3}, \frac{110}{3})$.

11.4 Chapitre 5

Exercice 1

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 10 \quad z = 17$$

Exercice 2

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 250x_1 + 45x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 0,2x_1 \leq 72 \\ & & 150x_1 + 25x_2 \leq 10\ 000 \\ & & x_1 \leq 50 \\ & & x_2 \leq 200 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution:

$$x_1 = 40 \quad x_2 = 160 \quad z = 17200$$

Exercice 3

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 2x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution : $x_1 = 0,6 \quad x_2 = 1,2 \quad z = 2,4$

Exercice 4

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 5\ 000x_1 + 2\ 000x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ & & x_1 + 3x_2 \leq 25 \\ & & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 20 \quad x_2 = 0 \quad z = 10\ 000$

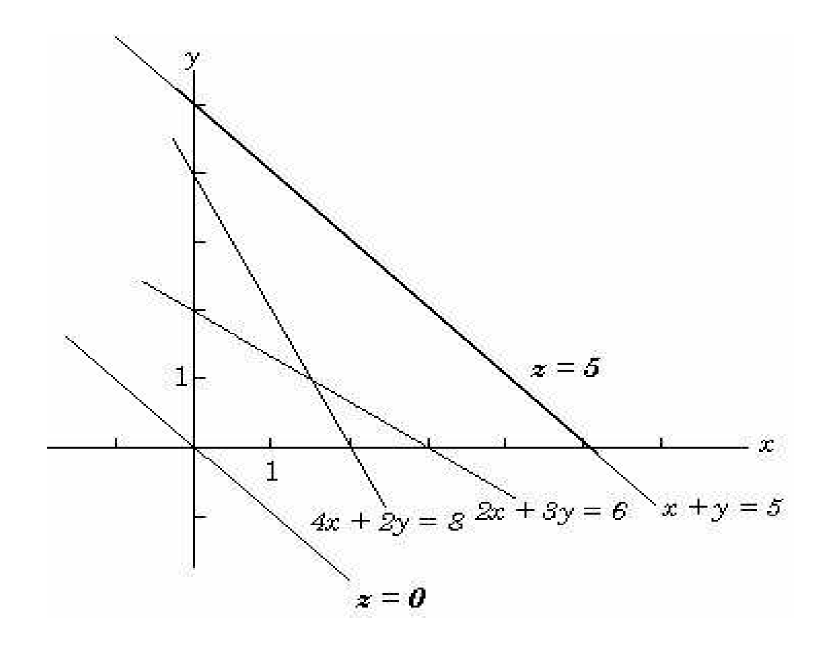
Exercice 5

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 100x_1 + 400x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & & x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ & & x_1 + 5x_2 \geq 23 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad z = 1\,900$

Exercice 6



Il existe une infinité de solutions optimales pourvu que $z = x + y = 5$.

Exercice 7

Formulation du problème:

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ \text{sous contraintes } & \quad 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & \quad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ \text{et } & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solution: $x_1 = 0 \quad x_2 = 0,5 \quad x_3 = 0,5 \quad z = 9$

Exercice 8

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 0 \quad z = 100$$

Exercice 9

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 125 \quad x_3 = 1\ 500 \quad z = 6\ 000$$

Exercice 10

$$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{2}{3} \quad y_3 = \frac{2}{3} \quad z = \frac{4}{3}$$

Exercice 11

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 1,5x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_1 \leq 1\ 000 \\ & & x_1 + x_2 \leq 800 \\ & & x_1 \leq 400 \\ & & x_2 \leq 700 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 200 \quad x_2 = 600 \quad z = 1\ 300$

Exercice 12

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 4\ 800C + 6\ 000R \\ \text{sous contraintes} & & 10C + 10R \leq 130 \\ & & 16C + 24R \leq 240 \\ & & 30C + 90R \leq 810 \\ & & 15R \leq 180 \\ \text{et} & & C, R \geq 0 \end{array}$$

Solution: $C = 9 \quad R = 4 \quad z = 67\ 200$

Exercice 13

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 30x_1 + 12x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 600\ 000x_1 + 200\ 000x_2 \leq 18\ 000\ 000 \\ & & 120x_1 + 60x_2 \leq 4\ 500 \\ & & 800x_1 + 600x_2 \leq 42\ 000 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 12 \quad x_2 = 54 \quad z = 1\ 008$

Exercice 14

$$x_1 = \tfrac{2}{3} \quad x_2 = 2 \quad z = \tfrac{200}{3}$$

Exercice 15

Ce système possède une infinité de solutions, tant que $x_1 + x_2 = 1$.

Exercice 16

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 3,5x_1 + 6,5x_2 + 5x_3 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 \geq 15 \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ & & 0,5x_1 + 0,5x_2 + x_3 \geq 10 \\ & & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 25 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 15,5 \quad x_2 = 2,5 \quad x_3 = 1 \quad z = 75,5$

Exercice 17

Formulation du problème:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{sous contraintes} & & 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 \geq 11 \\ & & 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 \geq 70 \\ & & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \text{et} & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solution: $x_1 = 0,5 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0,5 \quad z = 3$

11.5 Chapitre 6

Exercice 1

(a) $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)

$$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

(b) $x_1 = 4$, $x_2 = 10$, $z = 50$

Exercice 3

$x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $z = 10$

Exercice 4

$x_1 = 15/4$, $x_2 = 35/4$, $x_3 = 15/2$, $z = 35$

Exercice 5

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 5$

11.6 Chapitre 7

Exercice 1

$$\begin{array}{rcl} \text{Min } z^* & = & 10u_1 + 5u_2 + 6u \\ s.c. & & u_1 \geq 1 \\ & & -u_1 + u_2 \geq 1 \\ & & u_1 + 2u_3 \geq 0 \\ et & & u_i \geq 0 \end{array}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\text{Max } z^* &= 7u_1 + 9u_2 + 3u_3 + 5u_4 \\ s.c. \quad & u_1 - u_3 = 1 \\ & -u_1 + u_4 = 1 \\ & u_2 + u_3 = 1 \\ & -u_2 + u_4 = -1 \\ et \quad & u_i \geq 0\end{aligned}$$

Exercice 3

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $z = -6$

Exercice 4

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = -1$

Exercice 5

Ce problème n'a pas de solution réalisable, car son dual possède une solution infinie

Exercice 6

$K = 360$, $L = 100$ et le coût de production s'élève à 1 640.

Exercice 7

(a) $x_1 = 2,5$, $x_2 = 7,5$, $x_3 = 2,5$ et $z = 60$

(b) $u_1 = 4$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ et $z^* = 60$

(c) L'augmentation d'une unité de l'input 1 induit une augmentation de 4 du chiffre d'affaire de l'entreprise. Toutefois, ceci n'est vrai qu'à partir de la solution trouvée en (a).

11.7 Chapitre 8

Exercice 1

(a) Solution optimale: $x_1 = 1,2$, $x_2 = 1,6$, et $z = 7,2$

(b) $z_3 - c_3$ devient négatif. L'algorithme du simplexe s'applique donc à partir de la solution précédente. La nouvelle solution optimale est $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ et $z = 16$.

Exercice 2

(a) Solution optimale: $p_1 = 1$, $p_2 = 4$ et $z = 22$.

(b) Tous les $z_j - c_j$ sont positifs, la solution de base reste donc optimale, mais $z = 18$.

Exercice 3

(a) Solution optimale: $x_1 = 75$, $x_2 = 0$, $x_3 = 100$ et $z = 650$.

(b) La solution reste optimale, mais $z = 750$.

Exercice 4

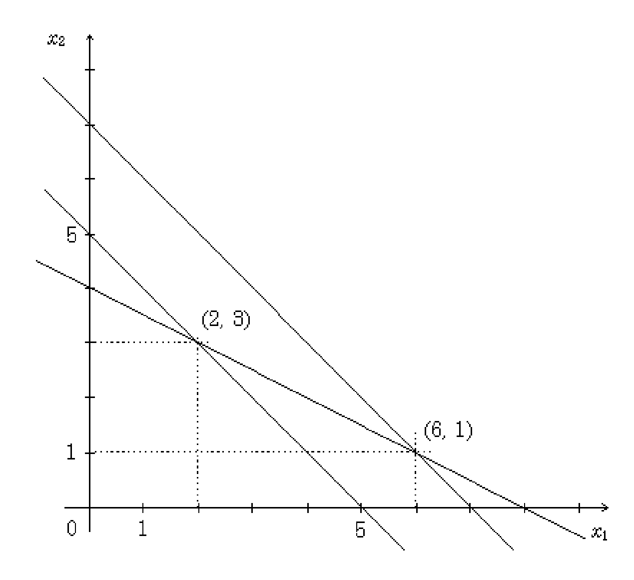
(a) Solution optimlae: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $z = 18$.

(b) Calcul de la nouvelle solution:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_B^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Comme toutes les composantes de $\boldsymbol{x}_B^*$ sont positives, la solution est réalisable. L'optimum est donc atteint pour $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ et $z = 22$.

(c)



Exercice 5

(a) Solution de base optimale: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $z = 28$.

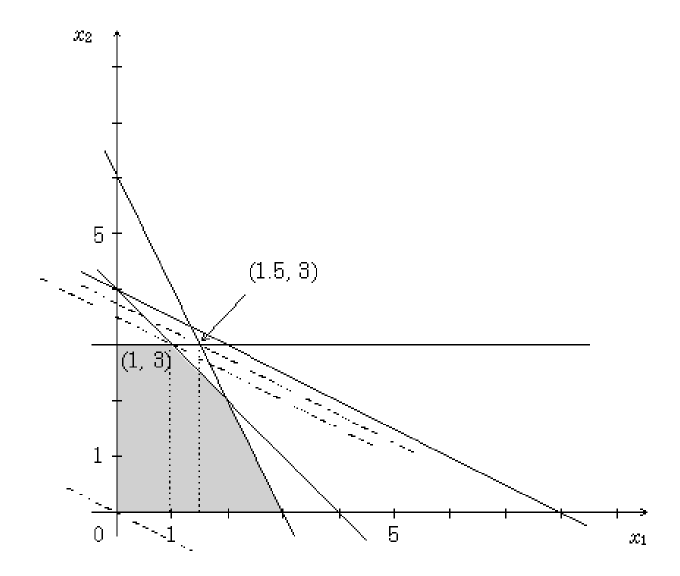
(b) Nouvelle solution optimale: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ et $z = 24$.

Exercice 6

(a) Solution de base optimale: $x_1 = 2,5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ et $z = 22,5$.

(b) Nouvelle solution optimale: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ et $z = 25$.

Exercice 7



La solution optimale apparaît au point $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Avec la modification de la deuxième contrainte, l'ensemble des solutions réalisables s'élargit et la nouvelle solution optimale se trouve au point $x_1 = 1,5$, $x_2 = 3$.

Exercice 8

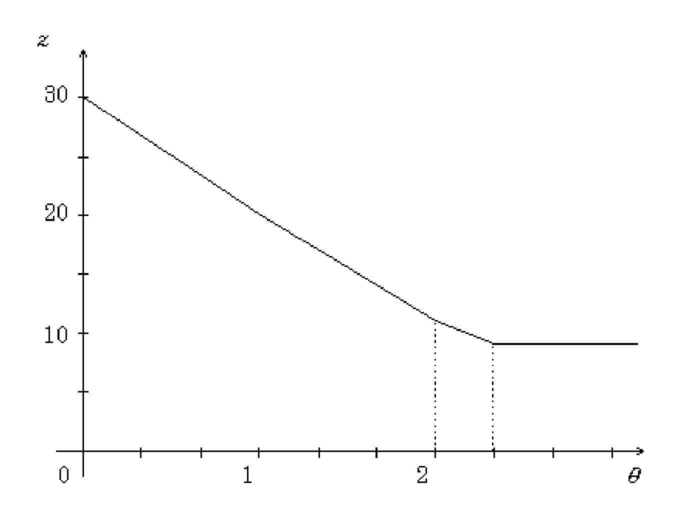
(a) Solution de base optimale: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ et $z = 30$.

(b) Avec $\theta^{(1)} = 1$, la solution de base reste optimale avec $z = 20$, mais n'est plus unique. $x_1 = 9$, $x_2 = 2$ et $z = 20$ est également une solution de base optimale.

(c) Lorsque $\theta^{(2)} = 2$, la solution de base n'est plus optimale. La solution $x_1 = 9$, $x_2 = 2$ et $z = 11$ reste optimale. La nouvelle solution est : $x_1 = 6$, $x_2 = 5$ et $z = 11$.

(d) Avec $\theta^{(3)} = 2,3$, on trouve une nouvelle solution: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ et $z = 9$. Toute nouvelle augmentation de θ ne modifie plus la solution optimale.

(e)



11.8 Chapitre 9

Exercice 1

- Méthode de la matrice minimale:

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	26	23	10 ☐ 61	61
2	14	13 ☐ 49	21	49
3	16 ☐ 52	17 ☐ 19	29 ☐ 19	90
Demande	52	68	80	200

- Méthode du coin nord-ouest:

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	26 ☐ 52	23 ☐ 9	10	61
2	14	13 ☐ 49	21	49
3	16	17 ☐ 10	29 ☐ 80	90
Demande	52	68	80	200

- Méthode de Vogel:

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	26	23	10 ☐ 61	61
2	14	13 ☐ 30	21 ☐ 19	49
3	16 ☐ 52	17 ☐ 38	29	90
Demande	52	68	80	200

Exercice 2

Solution optimale:

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	26	23	10 ☐ 61	61
2	14	13 ☐ 30	21 ☐ 19	49
3	16 ☐ 52	17 ☐ 38	29	90
Demande	52	68	80	200

Avec $z = 2\ 877$

Exercice 3

La solution est optimale car toutes les boucles sont non-négatives.

Exercice 4

Solution optimale:

Origines	Destinations 1	2	3	Offre
1	12 100	9 250	7	350
2	15 400	22	21	400
3	23	17 50	11 170	220
Demande	500	300	170	970

Avec $z = 12\ 170$

Exercice 5

Ce problème peut être considéré comme un problème de transport représenté par le tableau suivant:

Origines	Destinations 1	2	3	4	5	Offre
1	4	3	9	10	2	120
2	7	6	8	11	9	180
3	7	5	4	6	8	200
4	12	11	5	7	9	250
Demande	100	200	150	170	130	750

Avec la matrice :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En choisissant la méthode de la matrice minimale pour la solution de base, on trouve comme solution optimale du problème de transport:

Origines	Destinations 1	2	3	4	5	Offre
1	4 70	3	9	10	2 50	120
2	7 30	6 150	8	1	9	180
3	7	5 50	4 150	6	8	200
4	12	11	5	7 170	9 80	250
Demande	100	200	150	170	130	750

Avec $z = 4\ 250$

Bibliographie

[1] Achmanov S. (1984). *Programmation Linéaire*. Éditions Mir, Moscou.

[2] Ahuja R.K., Magnanti T.L. and Orlin J.B. (1993). *Network Flows : Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, Uppe Sadle River, N.J.

[3] Allen R.G.D. (1950). *Analyse mathématique et théorie économique*. Presses Universitaires de France, Paris.

[4] Arthanari T.S. and Dodge Y. (1993). *Mathematical Programming in Statistics*. Classic Edition, John Wiley & Sons, New York.

[5] Azoulay P., Dassonville P. (1976). *Recherche opérationnelle de gestion*. Presses universitaires de France, Paris.

[6] Bazaraa M.S., Jarvis J.J. and Sherali H. (1990). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, New York.

[7] Beckmann P., (1977). *A history of Pi*. Golem Press, Boulder, Colorado.

[8] Blazewicz J., Ecker K.H., Pesch E., Schmidt G., Weglarz J. (1996). *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer, Berlin.

[9] Chvatal V. (1983). *Linear Programming*. W.H. Freeman, San Fransisco.

[10] Chiang A.C. (1985). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3rd ed. International Student edition, McGraw-Hill, Singapore.

[11] Churchman C.W., Ackoff R.L. and Arnoff E.L. (1959). *Introduction to Operations Research*. Wiley, New York.

[12] Dantzig G.B. (1966). *Applications et prolongements de la programmation linéaire*. Dunod, Paris.

[13] Dantzig G.B. (1951). *Application of the simplex method to a transportation problem*. Chapter 23 in Koopmans (Ed). John Wiley and Sons, New York.

[14] Dantzig G.B. (1953). *Computational Algorithm of the Revised Simplex Method*. The RAND Corporation, Santa Monica, California.

[15] Dantzig G.B., Orden A. and Wolfe P. (1954). *Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequalities Restraints*. The RAND Corporation, Santa Monica, California.

[16] Dantzig G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, N.J.

[17] Dantzig G.B. and Mukund N.T. (1997). *Linear Programming, Introduction*. Springer, New York.

[18] Denardo E.V. (1982). *Dynamic Programming : Models and Applications*. Prentice Hall, Upper Sadle River, N.J.

[19] De Werra D. (1990). *Éléments de programmation linéaire avec application aux graphes*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, Suisse.

[20] Dodge Y. (1987). *Introduction à la programmation linéaire*. EDES, Neuchâtel, Suisse.

[21] Dodge Y. (1993). *Statistique, dictionnaire encyclopédique*. Dunod, Paris.

[22] Dodge Y. (1996). *Mathématiques de base pour économistes*. 3e ed. Presses Académiques Neuchâtel, Neuchâtel, Suisse.

[23] Dorfmann R., Samuelson P.A., Solow R.M. (1958). *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill, New York.

[24] Droesbeke F., Hallin M., Lefevre C. (1986). *Programmation linéaire par l'exemple*. Ed. Marketing, Paris.

[25] Fang S.-C. and Puthenpur S. (1993). *Linear Optimization and Extensions Theory and Algorithms*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

[26] Faure R. (1971). *Éléments de la recherche opérationnelle.* 2e ed. Gauthier-Villars, Paris.

[27] Fauvel J. and Gray J. (1990). *The History of Mathematics.* MacMillan Press, London.

[28] Fisz M. (1967). *Probability Theory and Mathematical Statistics.* Third ed., Wiley, New York.

[29] Gacs P. et Lovasz L. (1979). *Khachiyan's Algorithm for Linear Programming.* Department of Computer Science Tech. Rep. STAN-CS-79-750, Standford University, Stanford, Calif.

[30] Gale D., Kuhn H.W. and Tucker A.W. (1951). *Linear Programming and the Theory of Games.* Chapter 19 in Koopmans [44].

[31] Gass S.I. (1975). *Linear Programming.* 4th ed. McGraw-Hill, New York.

[32] Goldman A.J. and Tucker A.W. (1956). *Theory of Linear programming in Linear Inequalities and Related Systems.* Kuhn and Tucker ed., Princeton.

[33] Granville W.A., Smith P.F. et Longley W.R. (1989). *Eléments de calcul différentiel et intégral.* 4e ed. Vuibert, Paris.

[34] Guerrien B. (1991). *Algèbre linéaire pour économistes.* 3e ed. Economica, Paris.

[35] Hadley G.F. (1978). *Linear Programming.* 6th ed. Addison-Wesley, Amsterdam.

[36] Hammersley J.M. and Handscomb D.C. (1964). *Monte-Carlo Methods.* Chapman and Hall, New York.

[37] Hillier F.S. and Lieberman G.J. (1986). *Introduction to Operations Research.* 4th ed. Holden-Day, Oakland.

[38] Hogg R.V. and Craig A.T. (1965). *Introduction to Mathematical Statistics.* Second ed. The MacMillan Compagny, New York.

[39] Horst R, Pardalos P.M. and Nguyen V.T. (1995). *Introduction to Global Optimization.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[40] Ignizio J.P. (1982). *Linear Programming in Single- & Multiple-Objective Systems*. Prentice-Hall, Englewood.

[41] Khachiyan L.G. (1979). *A Polynomial Algorithm in Linear Programming*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 224, N°5, p.1 093-1 096.

[42] Klee V. and Minty G.J. (1972). *How Good is the Simplex Algorithm?* In Inequalities III, ed. O. Shisha, Academic Press, New York.

[43] Koopmans T.C., Ed. (1957). *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley & Sons, New York.

[44] Lee A.M. (1970). *Les files d'attente, théorie et applications*. Dunod, Paris.

[45] Luenberger D.G. (1989). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading Mass.

[46] Martel A. (1979). *Techniques et applications de la recherche opérationnelle*. 2e ed. Gaëtan Morin, éditeur.

[47] Morse P.M. (1962). *Markov Processes in Notes on Operations Research*, assembled by Operations Research Center, the MIT Press, Cambridge.

[48] Murray W. (1979). *Ellipsoidal Algorithms for Linear Programming*. Systems Optimization Lab. Working Pap. 79-1, Stanford University, Stanford, Calif.

[49] Nemhauser G.L. and Wolsey L.A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York.

[50] Nobert Y., Ouellet R. et Parent R. (1999). *La recherche opérationnelle*. 2e ed. Gaëtan Morin, Montréal.

[51] Papadimitriou C.H. and Steiglitz K. (1982). *Combinatorial Optimization : Algorithm and Complexity*. Prentice-Hall, New York.

[52] Parker R.G. and Rardin R.L. (1988). *Discrete Optimization*. Academic Press, San Diego, California.

[53] Rardin R.L. (1998). *Optimization in Operations Research*. Prentice-Hall, N.J.

[54] Reeves C.R. (1995). *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. McGraw-Hill, London.

[55] Rothenberg R.I. (1979). *Linear Programming*. North Holland, Oxford.

[56] Roure F. et Butery A. (1987). *Mathématiques pour les sciences économiques et sociales*. 3e ed. Presses Universitaires de France, Paris.

[57] Shapiro J.F. (1979). *Mathematical Programming : Structures and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York.

[58] Shor N.Z. (1977). *Cut-Off Method with Space Extension in Convex Programming Problems*. Kibernetika, vol. 13, pp. 94-95.

[59] Simmons D.M. (1972). *Linear Programming for Operation Research*. Holden-Day, San Fransisco.

[60] Sobol I.M. (1975). *The Monte-Carlo Method*. Mir Publishers, Moscow.

[61] Thierauf R.J. (1978). *An Introductory Approach to Operations Research*. John Wiley & Sons, New York.

[62] Tricot C. et Picard J.M. (1969). *Ensembles et statistique*. McGrawHill, Montreal.

[63] Vanderbei R.J. (1998). *Linear Programming, Foundations and Extensions*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[64] Von Neumann J. (1947). *On a Maximization Problem*. (Manuscript). Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

[65] Weber J.E. (1976). *Mathematical Analysis : Business and Economic Applications*. 3rd ed. Harper & Row, Publishers.

[66] Winston W.L. (1994). *Operations Research : Applications and Algorithms*. 3rd ed. Duxbury Press, Belmont, California.

[67] Zeleny M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. Mc Graw-Hill, New York.

Index

Du même auteur

Aux Éditions Springer-Verlag France

Dodge Y (1999) Premiers pas en statistique.

Dodge Y (2002) Mathématiques de base pour économistes.

Dodge Y (2004) Statistique – Dictionnaire encyclopédique.

Autres éditeurs

Arthanari TS and Dodge Y (1981) Mathematical Programming in Statistics. John Wiley and Sons, New York.

Arthanari TS and Dodge Y (1993) Mathematical Programming in Statistics. Classic edition, John Wiley and Sons, New York.

Dodge Y (1985) Analysis of Experiments with Missing Data. John Wiley and Sons, New York.

Dodge Y (1987, 1989, 1996) Mathématiques de base pour économistes. Édes puis Presses Académiques, Neuchâtel.

Dodge Y (1987) Introduction à la programmation linéaire. Editions EDES, Neuchâtel.

Dodge Y (1987) (Ed.) Statistical Data Analysis based on the L1-norm and Related Methods. North-Holland, Amsterdam.

Dodge Y, Fedorov VV and Wynn HP (1988).(Eds) Optimal Design and Analysis of Experiments. North-Holland, Amsterdam.

Dodge Y (1989) (Ed.) Statistical Data Analysis and Inference. North-Holland, Amsterdam.

Dodge Y, Mehran F et Rousson M (1991) Statistique. Presses Académiques, Neuchâtel.

Dodge Y (1992) (Ed.) L1-Statistical Analysis and Related Methods. North-Holland, Amsterdam.

Dodge Y and Whittaker J (1992) (Eds) Computational Statistics I. Physica Verlag, Heidelberg.

Dodge, Y. and Whittaker, J. (1992) (Eds) Computational Statistics II. Physica Verlag, Heidelberg.

Birkes D and Dodge Y (1993)Alternative Methods of Regression. John Wiley and Sons, New York.

Dodge Y (1993) Statistique : Dictionnaire encyclopédique. Dunod, Paris.

Dodge Y (1997) (Ed.) L1-Statistical Procedures and Related Topics. IMS Lecture Notes and Monographs Series, Volume 31, Berkley, U.S.

Dodge Y (1999) Analyse de régression appliquée. En collaboration avec V. Rousson. Dunod, Paris.

Dodge Y and Jureckovà J (2000) Adaptive regression. Springer-Verlag, New York.

Dodge Y (2002) (Ed.) Statistical Data Analysis based on the L1 norm and related methods. Birkhauser, Basel.

Dodge Y (2003) The Oxford Dictionary of Statistical Terms. Oxford University Press, Oxford.



Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD
B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL
Dépôt légal : Septembre 2004 - N° d'imprimeur : 15255
Imprimé en France

Yadolah Dodge

Optimisation appliquée



Fondateur du diplôme postgrade en statistique (Master) à l'Université de Neuchâtel depuis 1989, Yadolah Dodge a obtenu son Master en statistique de l'Université d'État de l'Utah en 1970 et son doctorat en statistique de l'Université d'État de l'Oregon en 1973. Il est membre élu de l'Institut international de statistique depuis 1976 et également l'initiateur en 1995 de la revue statistique Student. Le professeur Yadolah Dodge est l'auteur de nombreux ouvrages publiés en français et en anglais.

Cet ouvrage présente les concepts fondamentaux d'optimisation classique et de programmation linéaire.
Outre un prologue et un épilogue, l'ouvrage comporte une partie de théorie mathématique sur le calcul matriciel et les systèmes d'équations et d'inéquations linéaires. Il traite ensuite d'optimisation classique avec et sans contraintes, de programmation linéaire, de la méthode du simplexe et du simplexe révisé.
Les derniers chapitres sont consacrés à la dualité, à la post-optimisation et analyse de sensibilité ainsi qu'aux problèmes de transport. L'accent a été mis sur l'explication des méthodes exposées et leur utilisation. De nombreux exemples numériques tirés de diverses situations de la vie économique et sociale sont proposés.

Chaque chapitre se termine par une série d'exercices illustrant les différents concepts et méthodes étudiés. Les solutions de tous les exercices sont présentées à la fin de l'ouvrage. Certains sujets de programmation linéaire, comme par exemple la théorie des graphes ou celle des réseaux n'ont pas été abordés dans ce volume. Les personnes intéressées pourront enrichir leur connaissance en consultant les ouvrages cités en référence.

Cet ouvrage est destiné aux étudiants d'économie, de gestion, d'informatique de gestion et de mathématiques appliquées. Il s'adresse également aux chercheurs de divers domaines des sciences appliquées ainsi qu'aux professeurs qui disposent ainsi d'un support pour leur enseignement.



springeronline.com